第107回数学教育実践研究会 レポート発表

整数論でOne more thing 2

北海道札幌南高等学校教諭 長尾良平

平成30年12月1日 アスティ45

1 はじめに

筆者は以前, [1] において整数分野での実践を紹介した. あれから2年が経ち, 小ネタが少し溜まったので第2弾として紹介していきたい.

今回は利用したグッズの紹介が主となるが, 製造元の回し者ではない.

2 素数ものさし

今年の夏, 実家の神戸に帰省した際に, 用事があって京都大学の総合博物館を訪ねた. そこの売店で購入したのが「素数ものさし」である.



図 1: 素数ものさし

物差しは全長 18cm である. 上段では cm 単位 で測ることができるが、18 以下の素数である 2,3,5,7,11,13,17 にのみ目盛りが振られている. また、下段では mm 単位で測ることができるが、 180 以下の素数に対応する部分にのみ目盛りが **振られている**. したがって, 実際に長さを測る際には**少し工夫が必要**である.

例

- (1) 12 cm ☜ 17 cm と 5 cm との差
- (2) 35 mm ☜ 37 mm と 2 mm との差

何とも面倒くさいブツである. しかし, 生徒たちは「うわ! 面倒くさい!」と言いつつも, どうやったら目盛りに無い長さを測ることができるか考えていた.

「双子素数の予想」を紹介するときに持って いくのも良いと思う.

3 2017年最大の素数

[1] において、「整数の話は(難問であっても) 主張は伝わりやすいので、高校生にも紹介できる ところが良いと考えている」 とし、

- 双子素数の予想
- ゴールドバッハ予想
- メルセンヌ数 2ⁿ 1

や, 当時最大のメルセンヌ素数 2⁵⁷⁸⁸⁵¹⁶¹ – 1 を授業で取り上げたことを紹介している.

メルセンヌ素数は、その発見を目的とした プロジェクトである GIMPS(Great Internet Mersenne Prime Search) によって、日々新た なものの探索が行なわれている。最近では、2018

年1月3日に50番目のメルセンヌ素数である

 $M77232917:2^{77232917}-1$

が発見された. M77232917 は **2324 万 9425 桁** という, 想像もつかないような巨大な素数である. その M77232917 に真っ向勝負を挑んだのが, 「2017 年最大の素数」である.



図 2: 2017年最大の素数

2324万9425 桁が, 米粒より小さいフォントサイズで印字されている. 授業中, 生徒に見るように促したが, **あまりの桁数に圧倒**され, そして**笑うしかない**ようであった.

ちなみに, M77232917 の発見に伴い, 缶バッジ も発売されている(神保町の書泉グランデにて 購入).



図 3: M77232917 缶バッジ

4 バイナリウォッチ

10 進法に馴染み過ぎているためか、生徒たちはn進法 (n進位取り) に**ピンとこない**ようである. ただ、2 進法は情報関連では基本となるため、**抵抗感を持って欲しく無い**と思っている. そこで、2 進法に**親しみを感じてもらいたくて**購入したのが「バイナリウォッチ」である.



図 4: バイナリウォッチ (その1)



図 5: バイナリウォッチ (その2)

バイナリウォッチには,

- 時間を表すのに1・2・4・8 と AM・PM
- 分を表すのに1・2・4・8・16・32

の LED が用意されている. **LED が点灯するのは約5秒間**なので, その間に時間・分のそれぞれについて, **素早く足し算をせねばならない(笑)**. LED が **4個**, **5個とついた時は大変である(汗)**. これまた面倒くさい製品であるが, **いい頭の体操**になる.

ある日の生徒との会話は.

- 「Apple Watch ですか?」
- 「違いま~す!」
- 「今何時ですか?」
- 「ちょっと待ってね・・・」

ボタンを押さないと時刻が表示されないので, 「高校入試の学力検査日」には装着できない.

5 ジョーク

数学にまつわるジョークは幾つか知られているが.

- 「世の中には二進法を理解可能な人間と理解不能な人間の10種類しか存在しない」「他の8種類は?」「つまり君は後者」
- 「なぜ数学者は、ハロウィンとクリスマスを 混同する?」

「8進数 (Oct) の 31 は 10進数 (Dec) の 25 だからさ」

などはn進法に関するもので、授業で取り上げると面白いと思う.

前者については、実際に授業で紹介したが、(音読するとネタバレしてしまうため)大きめの紙に印刷したものを提示し、「さて、みんなはどっち?」と問いかけた。分かる生徒はニヤニヤし、分からない生徒は「えっ? どういうこと?」と周りの生徒に助けを求めていた。

また,後者については発案者のセンスが光る ジョークだと思う.

6 百五減といふこと

[1]でも取り上げた百五減算(連立合同式)である. 塵劫記では

- 3で割ると2余る…①
- 5で割ると1余る···②
- 7で割ると2余る...③

となっているが、授業ではまず、②かつ③の場合を考えさせた.

② は x = 5k + 1, ③ は x = 7m + 2 $(k, m \in \mathbf{Z})$ と表現できるので, x を消去すると

$$5k - 7m = 1 \cdot \cdot \cdot \cdot \textcircled{4}$$

となる。

$$5 \cdot 3 - 7 \cdot 2 = 1 \cdots \mathfrak{D}$$

が成り立つので.

$$5(k-3) = 7(m-2)$$

となり、GCD(5,7) = 1 より、k = 7k' + 3 ($k' \in \mathbf{Z}$) と表せる. したがって、

$$x = 5(7k' + 3) + 1$$

= $35k' + 16 \cdots ©$

が得られる.

ここまで計算した上で,前の方に座っている生徒に**「誕生日が来たかどうか」確認**し,来ている生徒に対して.

- 年齢を5で割った余り
- 年齢を7で割った余り

を質問する. すると, それぞれ「1」, 「2」という答えが返ってくるので, 「分かるよね」と問いかけると生徒は問題との関連に気づく.

「k' **の値は顔を見て決めよっか」**と言い, 生徒の顔をまじまじ見つめる.

- 「k' = 1 かな?」嫌な顔をされる
- $\lceil \vec{c} \otimes \delta \wedge k' = 2 \vec{c} \otimes \delta \wedge k \rceil$

☞ 「先生ひどい!」と言われてしまう

「質問を増やせば、顔を見て判断しなくていいかもね(笑)」という流れで、

- ①を付け加えた問題が塵劫記にあること■ 解は x ≡ 86 (mod 105)
- ガウスが上手に計算したこと
 - 의 解を x = 15a + 21b + 70c + 105n とおき、 条件を使うと a = 2, b = 1, c = 2.

よって, $x = 191 + 105n \equiv 86 \pmod{105}$

™ やっぱりガウスは上手い!

を紹介して締めくくった.

7 終わりに

数えることは小さい頃から行っており, **整数は** 生徒にとって馴染みのある対象である.

ただ、大学入試という点では生徒たちにとって

- パターン学習が効かない
- 思考力が要求される

ことから**一筋縄ではいかない分野**であり, 苦手とする生徒は多いと思う. そこで, **生徒の学習意欲を後方支援**する目的で「整数グッズ」を授業に持ち込んだ.

また, 筆者が「日々, 数学に関することに興味 を持ち, アンテナの感度を上げていること」をア ピールするねらいもある.

これからも, 筆者同様, 生徒にも**数学と楽しく** 接してもらえるように, 話題を提供していきたい.

参考文献等

- [1] 長尾良平「整数論で One more thing」 第 98 回数学教育実践研究会レポート
- [2] 不便益システム研究所 http://fuben-eki.jp
- [3] Great Internet Mersenne Prime Search https://www.mersenne.org
- [4] 「2017年最大の素数」虹色社
- [5] 無茶しやがって…。「史上最大の素数」まさか の書籍化

https://www.huffingtonpost.jp/2018/01/20/amazing-book_a_23338997

- [6] 時間がわかりにくいクールな文字盤の時計 https://gigazine.net/news/20070827_ geek_clock/
- [7] 吉田光由「塵劫記」岩波書店
- [8] 数学的なジョーク https://ja.wikipedia.org/wiki/数学的な ジョーク
- [9] コバトンと!

https://twitter.com/kobatonto/status/1013800212207321090