

# 第106回数学教育実践研究会 レポート発表

## データの分析でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭 長尾良平

平成30年8月4日 小樽桜陽高等学校

### 1 はじめに

統計量として、平均値と中央値はよく用いられる。これらの値を考えることにより、与えられたデータの「真ん中」辺りがわかる。そうして得られた統計量については、データの「個性が薄まっている」という見方ができる。実は、この発想が画像処理に応用されている。そこで、教科書の内容を終えた後で、「データの分析」の枠にとどまらず、「画像処理入門」的な感じで) コンピュータを利用して授業を行った。

表計算ソフトウェアである Excel と画像処理ソフトウェアである GIMP を活用した授業での実践例を紹介していきたい。

### 2 Excelでの実装

デジタルデータでは画像は点の集合体であり、各点(画素)毎にR・G・Bの3色について明るさを数値として格納している。24ビットカラーだと、各色は0~255の $2^8$ 段階、 $2^{24} \cong 1670$ 万色を表現できる。画像処理ソフトでは、それらの数値に数値計算(フィルタ処理)を行って、画像処理を行っている。

これらの仕組みを目に見える形で実感したかったので、[3][4]を参考にして次のような作業を行った。

- (1) JPEGの画像データをBMPに変換する。
- (2) BMP2CSVで数値データに変換する。
- (3) Excelで開く。

- (4) 別のシートにフィルタに対応する関数式を入力する。
- (5) 条件付き書式→カラスケールで着色する。  
☞ 最小値0, 最大値255で設定。
- (6) 表示倍率を10%にする。

#### 例1 移動平均フィルタ

これは元の画像の各点について、輝度を「周りの8点を含めた9点の平均値」で置き換える働きをする。例として、B2のセルを中心とする9個のセルを考える。

A1	B1	C1
A2	B2	C2
A3	B3	C3

このとき、B2の値を次の演算結果で置き換える。

$$= \text{AVERAGE}(A1:A3, B1:B3, C1:C3)$$

これは、次の行列との「曇り込み」演算の結果を9で割ったものに等しい。

1	1	1
1	1	1
1	1	1

図1: 移動平均フィルタに対応する行列

具体的には、

75	77	80
78	150	85
75	79	84

であれば、演算結果は 87 となり、これが新たな B2 の値となる。処理前と比べて、周りの値との差が減少している。この演算を全ての画素において行う。

## 例 2 メディアンフィルタ

これは元の画像の各点について、輝度を「**周りの 8 点を含めた 9 点の中央値**」で置き換える働きをする。例として、B2 のセルを中心とする 9 個のセルを考える。

A1	B1	C1
A2	B2	C2
A3	B3	C3

このとき、B2 の値を次の演算結果で置き換える。

$$= \text{MEDIAN}(A1:A3, B1:B3, C1:C3)$$

具体的には、

75	77	80
78	150	85
75	79	84

であれば、小さい順に

75, 75, 77, 78, 79, 80, 84, 85, 150

と並ぶので演算結果は 79 となり、これが新たな B2 の値となる。処理前と比べて、周りの値との差が減少している。この演算を全ての画素において行う。

これらのフィルタの目的は

### (1) 画像をぼかす。

☞ 画素間の輝度の差が減少するので。

### (2) ノイズを取り除く。

☞ 外れ値の影響が減少するので。

ことにある。メディアンフィルタの方が**外れ値の影響を受けにくい**ので、ノイズ除去ではメディアンフィルタが用いられることが多い。また、単

純平均ではなく加重平均の場合は、先ほどの例とは異なる数式を入力することになる。有名なものとして「**ガウシアンフィルタ**」がある。次の行列との「畳み込み」演算の結果を 16 で割ったものに等しい。

1	2	1
2	4	2
1	2	1

図 2: ガウシアンフィルタに対応する行列

## 3 微分 (差分) の応用

(平均値や中央値の応用例として) 画像処理について調べていたところ、他にも数学の応用例が紹介されていたので取り上げてみたい。「**診療放射線技師国家試験**」にも出題される内容である。

画像処理で**物体間の境界を検出**したいことがある。境界では**輝度が急激に変化**する。変化を掴むための数学の道具としては微分が定番であるが、デジタルデータは連続ではなく離散なので、実際のところは**差分**を考えることになる。

0	0	0
-1	0	1
0	0	0

図 3:  $x$  方向の差分に対応する行列

このフィルタを適用すると、 $C2 - A2$  の値が新たな B2 の値となる。

0	-1	0
0	0	0
0	1	0

図 4:  $y$  方向の差分に対応する行列

このフィルタを適用すると、 $B3 - B1$  の値が新たな B2 の値となる。

差分をとる画素を増やしてノイズの影響を抑えたものとして、「Prewitt フィルタ」や「Sobel フィルタ」が有名である。

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

図 5:  $x$  方向の差分 (Prewitt)

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

図 6:  $x$  方向の差分 (Sobel)

また、微分を2回行うことによって境界検出を行う「ラプラシアンフィルタ」も利用されている。

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

図 7: ラプラシアンフィルタ (8方向)

$f(i-1, j+1)$	$f(i, j+1)$	$f(i+1, j+1)$
$f(i-1, j)$	$f(i, j)$	$f(i+1, j)$
$f(i-1, j-1)$	$f(i, j-1)$	$f(i+1, j-1)$

$$f_x(i, j) = f(i+1, j) - f(i, j)$$

$$f_x(i-1, j) = f(i, j) - f(i-1, j)$$

より

$$\begin{aligned} f_{xx}(i, j) &= f_x(i, j) - f_x(i-1, j) \\ &= f(i+1, j) + f(i-1, j) - 2f(i, j) \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} f_{yy}(i, j) &= f_y(i, j) - f_y(i, j-1) \\ &= f(i, j+1) + f(i, j-1) - 2f(i, j) \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} f_{xx} + f_{yy} &= f(i+1, j) + f(i-1, j) + f(i, j+1) \\ &\quad + f(i, j-1) - 4f(i, j) \end{aligned}$$

これに斜め方向も勘案したものが上記のラプラシアンフィルタ (8方向) になる。

また、上記のラプラシアンフィルタの結果を元画像から引くことによって、輪郭が強調された画像が得られる。

-1	-1	-1
-1	9	-1
-1	-1	-1

図 8: 輪郭強調フィルタ

緩やかな輝度の変化のイメージの例として、関数  $f(x) = \tan^{-1} x$  のグラフをあげてみる。そのとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \\ f''(x) &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

なので、 $g(x) = f(x) - f''(x)$  を考えると、

$$g(x) = \tan^{-1} x + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

となる。  $f(x)$  と  $g(x)$  のグラフを比較すると、  $g(x)$  の方が値の変化が急になっており、境界が強調される (ことに対応する) ことが分かる。

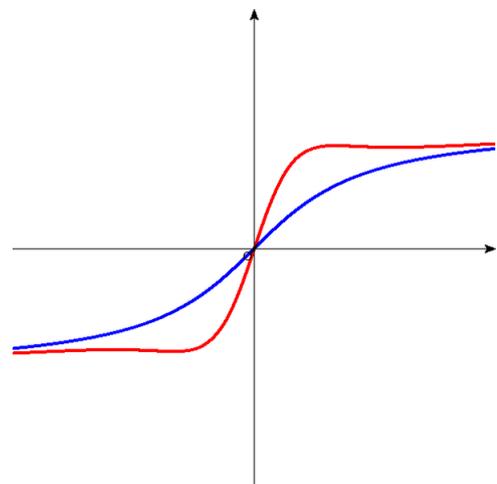


図 9: 輝度の変化を強調

## 4 GIMPでの例

GIMPでは、よく用いられる画像処理についてはプリセットのフィルタがあるが、汎用のものとして「コンボリューション行列」が利用できる。図10は「移動平均フィルタ」の場合である。GIMPでは5×5サイズまでのコンボリューション行列が適用できる。

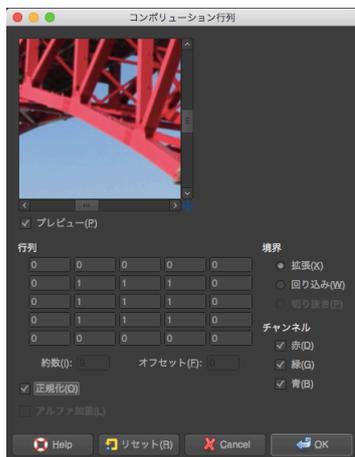


図 10: GIMP のコンボリューション行列

また、メディアンフィルタについては、「ノイズ除去フィルタ」として予め用意されている。

授業では、一連の説明・例示を終えた後に自由に生徒に画像処理をさせた。5×5サイズのコンボリューション行列に思い思いの数値を代入して、その効果や変化を楽しんでいた。

生徒はスマホを使いこなし、撮った写真を加工することも日常化している。そこに最近習ったことが応用されていることを知り、感心していた。

## 5 終わりに

筆者は Excel での操作を通して、**フィルタ処理を体感でき、驚きの連続**であった。また、画像処理の背景に**フーリエ変換等の数学が応用されている**ことを知り、**数学に対する興味を改めて喚起された**ことも収穫であった。BMP2CSV や GIMP (若しくは、USB から起動できる GIMP Portable) をダウンロードして、**ぜひ試していただきたい**。Web サイト「**数学のいずみ**」に研究会で使用した画像ファイルと Excel ファイルも掲載しているので、**そちらも見てください**。

画像処理は**やっていることが具体的に目に見える**ので、教材化するの**は面白い**と思う。3年生の理系で微分・積分を学び終えた後に、探究学習的に扱っても良いのではないだろうか。

今回は夏休み前最後の1時間での実践であり、少し慌ただしい展開となった。また1年生ということでPCを扱うスキルの差が大きく、お互い余裕のない展開となってしまった。2~3時間かけ、じっくり行うのが良いのではないかと思う。

「データの分析」はどれ位まで扱うのか、いろいろ意見のある単元だと思う。筆者は以前、[9]において回帰直線を扱った例を紹介したが、今回の画像処理の授業の前半で少しその話にも触れた。その際、「**曲線のあてはめ方**」について質問してきた生徒もいた。そのことを勘案すると、「**教科書に少し補足**」位が「**丁度良いさじ加減**」かな?と考えている。

新カリでは数学Bに推測統計が入るので、その準備も少しずつ進めておきたい。

## 参考文献等

- [1] 山田宏尚「**図解でわかる はじめてのデジタル画像処理**」 技術評論社
- [2] 「Interface 2018年7月号」 CQ出版社
- [3] エクセルで学ぶ画像処理  
<http://imagexcel.seesaa.net>
- [4] 画像処理ソリューション  
<http://imagingsolution.blog.fc2.com>
- [5] 2019年版 診療放射線技師国家試験完全対策問題集 ー精選問題・出題年別ー オーム社
- [6] BMP2CSVのダウンロード  
<https://www.vector.co.jp/soft/win95/art/se108144.html>
- [7] GIMPのダウンロード  
<https://www.gimp.org>
- [8] GIMP Portableのダウンロード  
[https://portableapps.com/apps/graphics\\_pictures/gimp\\_portable](https://portableapps.com/apps/graphics_pictures/gimp_portable)
- [9] 長尾良平「**確率・統計で One more thing**」  
第96回数学教育実践研究会レポート