

第106回数学教育実践研究会 レポート発表

関数のグラフでOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭 長尾良平

平成30年8月4日 小樽桜陽高等学校

1 はじめに

関数のグラフは、文字データである数式を絵として表現したものであり、**上手く活用できれば非常に有用なものである**。「百聞は一見に如かず」という諺のように、言葉（数式）で説明してもなかなか伝わらないことが、**絵（グラフ）を書けば一発で納得**してもらえる場面も多い。しかし、グラフに対して苦手意識を持っている生徒も少なくない。

2次関数の単元は高校で最初に関数を扱う場面であり、「関数を扱う際の基本を学ぶ」ことからとても大事なところである。学習時はグラフを多用することになるが、ここで躓く生徒が例年見られる。

そこで、2次関数のグラフに親しみを持ち、活用しようという意識を持ってもらうために行った実践を紹介していきたい。

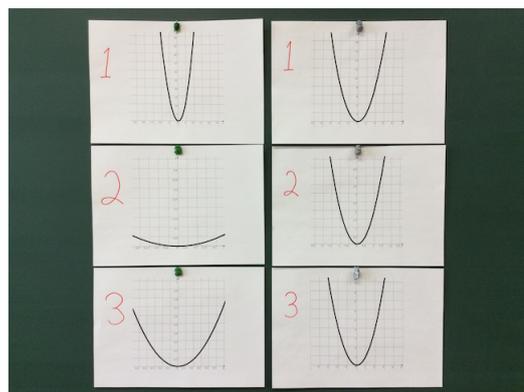


図1: 左がレベル5, 右がレベル100

意図的に教室後方の生徒を指名するので、その生徒は戸惑い、軸の目盛りが見えている教室最前列の生徒は笑っている。指名した生徒には前に出てきてもらい、黒板で確認してもらう。

その上で、相似になっていることを式で確認していく作業に移る。

2 全てのグラフは相似

中学校で関数 $y = ax^2$ のグラフは扱っており、「よく分かっている」感覚でいる生徒を揺さぶる目的で、次の問いを投げかけた。

問1 次の3つのグラフについて、それぞれどれが $y = x^2, y = 2x^2, y = \frac{1}{2}x^2$ なのかを答えよ。

(1) レベル5

(2) レベル100

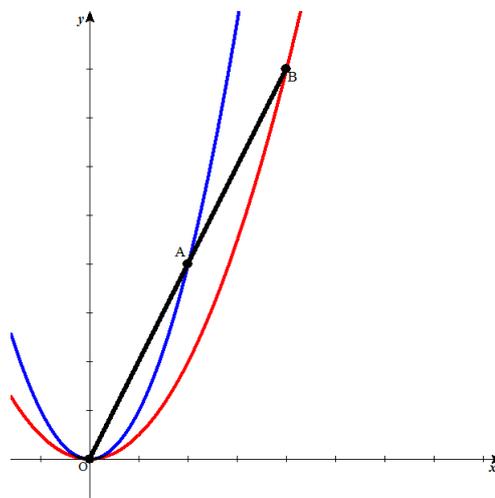


図2: 2つのグラフは相似なの？

$y = 2x^2$ のグラフ上の点 $A(p, q)$ をとり、原点 O と結んだ線分 OA を点 A の方向に伸ばし、 $y = x^2$ のグラフとの交点を B とする。点 A は $y = 2x^2$ のグラフ上にあるので、 $q = 2p^2 \cdots \textcircled{1}$ が成り立つ。

次に、**図を見ると OA と AB の長さが同じように思える**ので、仮に $OB = 2OA$ とすると、 $B(2p, 2q)$ とおける。このとき $\textcircled{1}$ を勘案すると、

$$(2p)^2 = 4p^2 = 2 \cdot 2p^2 = 2q$$

が成り立ち、**点 B は本当に $y = x^2$ のグラフ上にある**ことが分かる。

以上から、 $y = x^2$ のグラフは $y = 2x^2$ のグラフを原点を中心に2倍に拡大したものであることが示される。同様に、2次関数のグラフは全て相似であることが示される。

3 グラフの対称性

2次関数の最大・最小では、値域の両端（と頂点）で高さ比べ（ y の値の比較）を行うが、**グラフが軸に関して対称**であることは意識すべき性質である。そのことを強調するために、100均で見つけた「**トイレにつける棚**」を2つ購入して組合せ、生徒に訴えかけた。それにしても、不思議なデザインである。



図 3: 放物線の対称性

2次関数の授業時は毎時間教室に持っていきようにし、折に触れて説明で使うようにした。「**グラフが動く**」・「**定義域が動く**」最大・最小の問題において、生徒は区間の中心・グラフの軸に着目するようになった。

4 最大・最小

「**グラフが動く**」・「**定義域が動く**」最大・最小の問題は2次関数の単元のハイライトの1つである。アニメーション全盛のこのご時世に（というか、このご時世だからか）、**生徒はなかなか動くイメージが持ちづらい**ようである。そこで、具体物を見せながら着眼点について説明をしてみた。

PC等を利用すれば綺麗なグラフが動く様子を見せることができるが、**敢えてアナログ感にこだわってやってみた**。

問2 関数 $y = 2x^2 - 4ax$ ($0 \leq x \leq 1$) について、最大値と最小値を求めよ。ただし、 a は実数の定数とする。

- (1) 最大・最小で着目すべきは両端と頂点であることを確認した後で、頂点の座標 $(a, -2a^2)$ を求めさせる。
- (2) この段階で、 a の値を変化させた際、グラフがどのように動くのかイメージさせる。
 - ☞ 「頂点に注目したら？」とヒントを出すと、多くの生徒は正しくイメージできた。
 - ☞ $X = a, Y = -2a^2$ とおくと、頂点の軌跡は $Y = -2X^2$ になる。
- (3) そのイメージが正しいことを確認する。
 - ☞ GRAPES で作成した連続画像を利用した「**パラパラ漫画**」を紹介する。

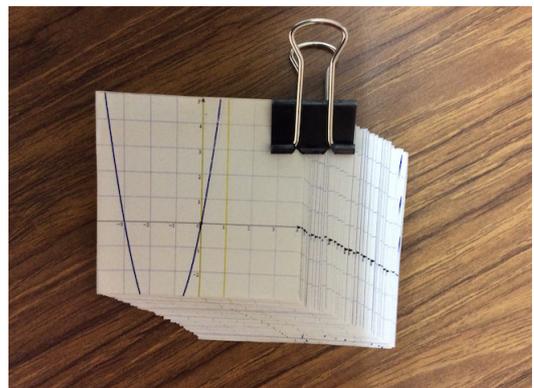


図 4: 昔懐かし「パラパラ漫画」

- (4) 帝塚山高校の赤坂先生 [5] のアイデアをお借りし、「**教室の窓**」を利用して考えていく。

