第85回数学教育実践研究会　レポート発表

繋いでみませんか

北海道室蘭東翔高等学校教諭　長尾良平

平成25年6月8日　北海道大学情報教育館

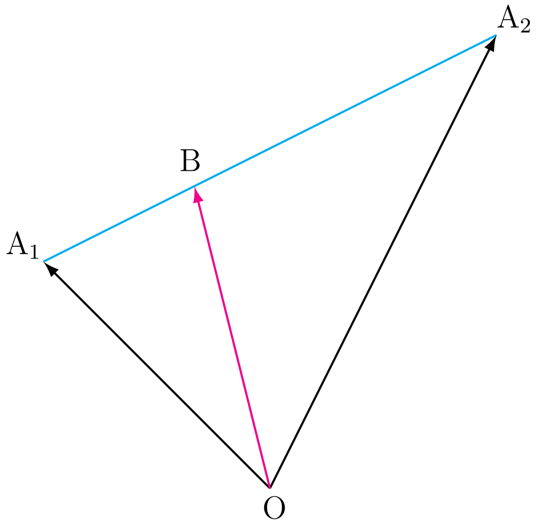
1　始めに

筆者の勤務校は総合学科であるため, 開設科目が多い. また, 1人で科目を受け持つことが多いので, 担当者の裁量が比較的大きい.

昨年度,「曲線の媒介変数表示」の単元の予習をしているときに, 何か良い題材がないか考えていた. 思案した後, **ベジェ曲線（Bézier Curve）**を扱うことに決めた. その実践の紹介である.

2　ベジェ曲線の構成

例1　線分 $\mathrm{A_1A_2}$ を $t:(1-t)$ に内分する点 B を考える. $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$ で表してみよう.



これはベクトル方程式の（大抵）始めのページに載っている例であり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}}$$

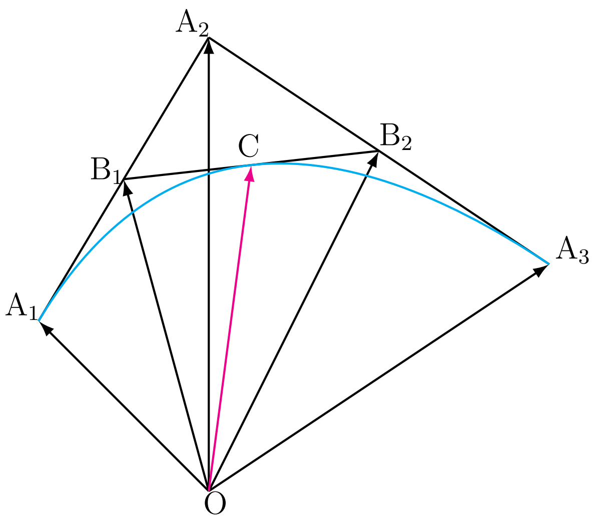
である.

例2　3点 $\mathrm{A_1, A_2, A_3}$ に対し, 3点 $\mathrm{B_1, B_2, C}$ を次のように定める.

B_i　線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ を $t:(1-t)$ に内分する点

C　線分 $\mathrm{B_1B_2}$ を $t:(1-t)$ に内分する点

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}, \overrightarrow{\mathrm{OA_2}}, \overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$ で表してみよう.



$$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \tag{1}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} \tag{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} \tag{3}$$

となるので, (1)(2) を (3) に代入して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OC}} &= (1-t)^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + 2(1-t)t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \\ &\quad + t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}\end{aligned} \tag{4}$$

を得る.

(4) において, t を 0 から 1 まで変化させたときに点 C が描く軌跡を, **3点 $\mathbf{A_1, A_2, A_3}$ を制御点とする2次のベジェ曲線**という.

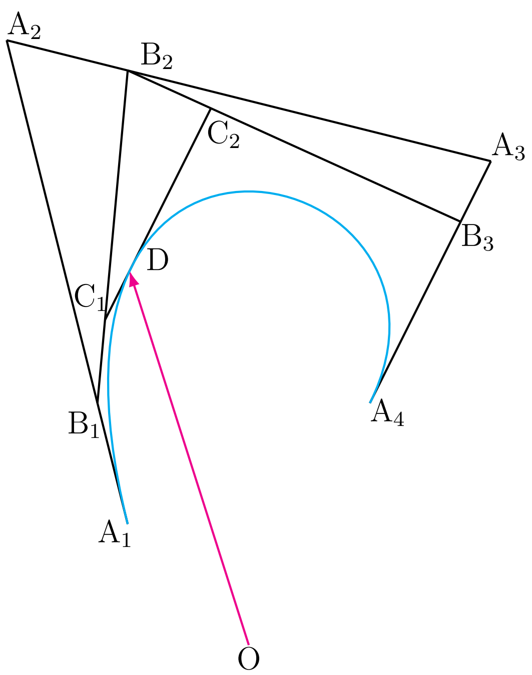
例 3　4 点 $\mathrm{A_1, A_2, A_3, A_4}$ に対し, 6 点 $\mathrm{B_1, B_2, B_3}$, $\mathrm{C_1, C_2}$, D を次のように定める.

B_i　線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}$ を $t:(1-t)$ に内分する点

C_i　線分 $\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1}$ を $t:(1-t)$ に内分する点

D　線分 $\mathrm{C_1C_2}$ を $t:(1-t)$ に内分する点

$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}, \overrightarrow{\mathrm{OA_2}}, \overrightarrow{\mathrm{OA_3}}, \overrightarrow{\mathrm{OA_4}}$ で表してみよう.



$$\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \tag{5}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} \tag{6}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB_3}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_4}} \tag{7}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC_1}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB_1}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} \tag{8}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC_2}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OB_2}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OB_3}} \tag{9}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (1-t)\,\overrightarrow{\mathrm{OC_1}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{OC_2}} \tag{10}$$

となるので, (5)(6)(7) を (8)(9) に代入して

$$\overrightarrow{\mathrm{OC_1}} = (1-t)^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + 2(1-t)t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OC_2}} = (1-t)^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} + 2(1-t)t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}$$

となり, この 2 式を (10) に代入することにより,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}} &= (1-t)^3\,\overrightarrow{\mathrm{OA_1}} + 3(1-t)^2t\,\overrightarrow{\mathrm{OA_2}} \\ &\quad + 3(1-t)t^2\,\overrightarrow{\mathrm{OA_3}} + t^3\,\overrightarrow{\mathrm{OA_4}}\end{aligned} \tag{11}$$

を得ることができる.

(11) において, t を 0 から 1 まで変化させたときに点 D が描く軌跡を, **4 点 $\mathbf{A_1, A_2, A_3, A_4}$ を制御点とする 3 次のベジェ曲線**という. また, **線分 $\mathbf{A_1A_2}$, $\mathbf{A_4A_3}$ を方向線**という.

3　ベジェ曲線について

ベジェ曲線は, ルノー (RENAULT) 社の**ベジェ (Pierre Bézier)** とシトロエン (Citroën) 社の**ド・カステリョ (de Casteljau)** により, それぞれ独立に考案されたものである. ド・カステリョの方が先んじていたが, 論文が公開されなかったため, 曲線にはベジェの名前が冠されている.

現在では, CAD やドロー系アプリケーション (Illustrator, Inkscape 等) , Type1 フォントなど様々なところで使用されている.

例 4　ベジェ曲線の持つ性質を 1 つ確かめてみる. 4 点 $\mathrm{A_1}(x_1, y_1)$, $\mathrm{A_2}(x_2, y_2)$, $\mathrm{A_3}(x_3, y_3)$, $\mathrm{A_4}(x_4, y_4)$ とする. $\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \bigl(x(t), y(t)\bigr)$ とすると

$$\begin{aligned}x(t) &= (1-t)^3x_1 + 3(1-t)^2tx_2 + 3(1-t)t^2x_3 \\ &\quad + t^3x_4\end{aligned}$$

となる. t で微分して整理すると

$$\begin{aligned}x'(t) &= 3\{(1-t)^2(x_2-x_1) + 2(1-t)t(x_3-x_2) \\ &\quad + t^2(x_4-x_3)\}\end{aligned}$$

となり,

$$x'(0) = 3(x_2-x_1),\ \ x'(1) = 3(x_4-x_3)$$

を得る. $y(t)$ についても同様に

$$y'(0) = 3(y_2-y_1),\ \ y'(1) = 3(y_4-y_3)$$

となるので

$$\begin{aligned}\bigl(x'(0), y'(0)\bigr) &= 3(x_2-x_1,\ y_2-y_1) \\ &= 3\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} \\ \bigl(x'(1), y'(1)\bigr) &= 3(x_4-x_3,\ y_4-y_3) \\ &= 3\overrightarrow{\mathrm{A_3A_4}}\end{aligned}$$

が成り立ち, **2 本の方向線がそれぞれ始点と終点における接線である**ことが示された.

この性質から次のことが分かる．各種アプリケーションでは方向線のことを**ハンドル**と呼び，ハンドルの向きや長さを調整して図形の描画を行なう．端点での接ベクトルの長さはハンドルの長さに比例するので，**ハンドルの長さを伸ばす程その方向に曲線が引っ張られる**ことになる．

4　数学 B での実践

ただ内分の演習をするより応用例と結びついた方が良いと考え，2 次のベジェ曲線を扱った．

例 5　$A_1(1,5), A_2(4,7), A_3(7,1)$ の 3 点を制御点とするベジェ曲線を考える．

(1)　$t=\dfrac{1}{4}$ に対応する点 C_1 の座標を求めよ．

(2)　$t=\dfrac{1}{2}$ に対応する点 C_2 の座標を求めよ．

(3)　$t=\dfrac{3}{4}$ に対応する点 C_3 の座標を求めよ．

(4)　A_1, C_1, C_2, C_3, A_3 を順に結んでベジェ曲線の概形を描いてみよう．

$t=\dfrac{1}{4}$（1 : 3 に内分）のとき，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB_1} &= \frac{3\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}}{4}\\ &= \frac{3(1,5)+(4,7)}{4}\\ &= \left(\frac{7}{4}, \frac{11}{2}\right)\end{aligned}$$

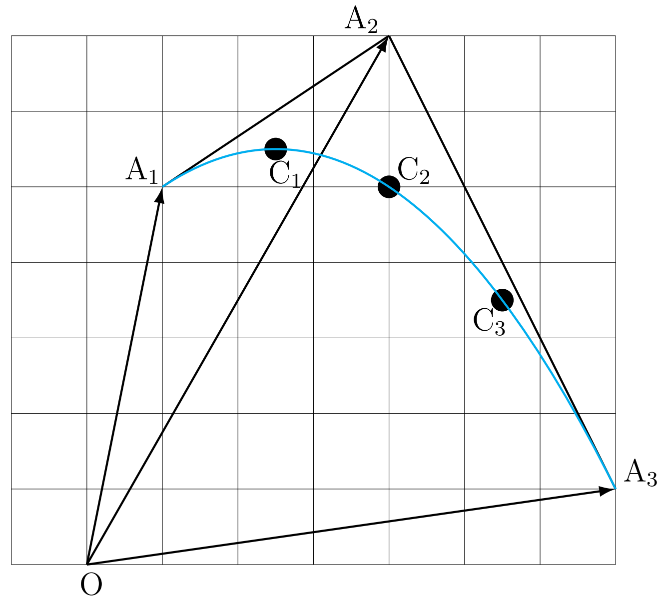
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OB_2} &= \frac{3\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_3}}{4}\\ &= \frac{3(4,7)+(7,1)}{4}\\ &= \left(\frac{19}{4}, \frac{11}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC_1} &= \frac{3\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OB_2}}{4}\\ &= \frac{1}{4}\left\{3\left(\frac{7}{4}, \frac{11}{2}\right)+\left(\frac{19}{4}, \frac{11}{2}\right)\right\}\\ &= \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right)\end{aligned}$$

同様に，他の t の値についても内分を計算して

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC_2} &= (4,5)\\ \overrightarrow{OC_3} &= \left(\frac{11}{2}, \frac{7}{2}\right)\end{aligned}$$

が得られ，5 点 A_1, C_1, C_2, C_3, A_3 を順に結ぶと次のようになる．



5　数学 C での実践

媒介変数表示された曲線の例として，3 次のベジェ曲線を扱った．

1 つの点の座標を求めるのに内分を 6 回行うのは大変なので，(11) に t の値や A_i の座標を直接代入して D_i の座標を求めた．

例 6　$A_1(-3,0), A_2(1,10), A_3(5,12), A_4(9,6)$ の 4 点を制御点とするベジェ曲線を考える．

(1)　$t=\dfrac{1}{4}$ に対応する点 D_1 の座標を求めよ．

(2)　$t=\dfrac{1}{2}$ に対応する点 D_2 の座標を求めよ．

(3)　$t=\dfrac{3}{4}$ に対応する点 D_3 の座標を求めよ．

(4)　A_1, D_1, D_2, D_3, A_4 を順に結んでベジェ曲線の概形を描いてみよう．

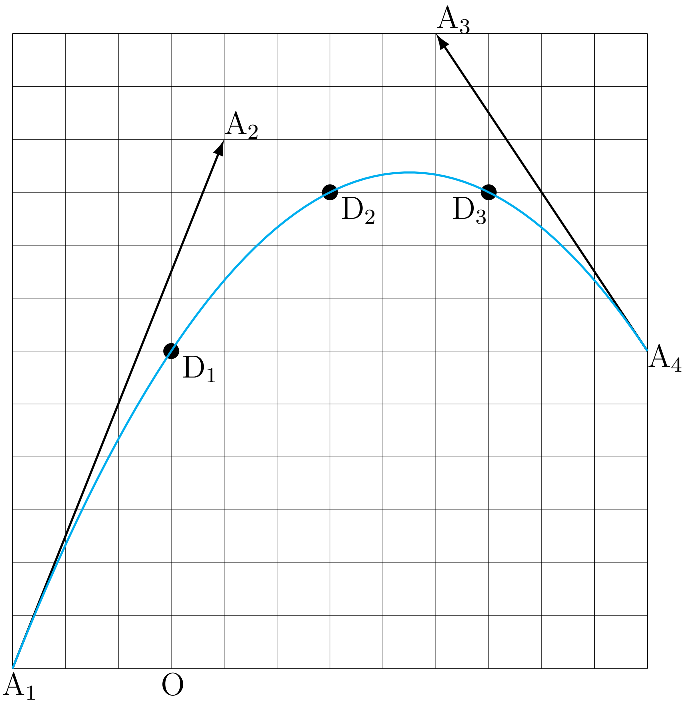
$t=\dfrac{1}{4}$（1 : 3 に内分）のとき，

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OD}_1} &= \left(1-\frac{1}{4}\right)^3 \overrightarrow{\mathrm{OA}_1} + 3\left(1-\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}_2} \\
&\quad + 3\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^2 \overrightarrow{\mathrm{OA}_3} + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \overrightarrow{\mathrm{OA}_4} \\
&= \frac{27}{64}(-3,0) + \frac{27}{64}(1,10) + \frac{9}{64}(5,12) \\
&\quad + \frac{1}{64}(9,6) \\
&= \frac{1}{64}(0,384) = (0,6)
\end{aligned}
$$

となる. 同様に, 他の t の値についても代入計算を行って

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OD}_2} &= (3,9) \\
\overrightarrow{\mathrm{OD}_3} &= (6,9)
\end{aligned}
$$

が得られ, 5 点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{D}_2, \mathrm{D}_3, \mathrm{A}_4$ を順に結ぶと次のようになる.



6　授業を終えて

多様な進路希望（理工系希望は少ない）の生徒を相手に, 数学の有用性を感じてもらえるよう応用例を意識して授業を行なった. 服飾系の専門学校に進学する生徒などは, 進学後に CAD を使うこともあり興味を示していた.

さて, (4) と (11) における $\overrightarrow{\mathrm{OA}_i}$ の係数は, それぞれ

$$
(1-t)^2 \ , \ 2(1-t)t \ , \ t^2
$$

$$
(1-t)^3 \ , \ 3(1-t)^2 t \ , \ 3(1-t)t^2 \ , \ t^3
$$

となっており, 統一的に

$$
{}_n\mathrm{C}_k \ (1-t)^{n-k} \ t^k \quad (k=0,\ldots,n)
$$

と表すことができる. これは前回の安田先生の**「多項式近似」の話で出てきたものと同じ**である **(ベルンシュタイン多項式)**. 講演を聞きながら, 昔の数学セミナーのある記事を思い出していた.

> 大数の法則は思わぬ方面に応用を持つ. 読者の皆さんはワイエルシュトラスの多項式近似定理をご存知だろうか. [0, 1] 上の連続関数が多項式で一様近似できるという例の定理である.
>
> 一見大数の法則とは何の関係もないこの定理を, 大数の法則から導くことができることに気が付いたのはベルンシュタインである. それにしても奇妙なことを考えついたものだ.

数学をやっていて, **一見無関係なものの間に関係性を見出したとき**, 面白さや奥深さを感じる.

新課程では「いろいろな曲線」が数学Ⅲに移るので, 「ベルンシュタイン多項式とその周辺」をまとめとして扱うのも良いのではないだろうか.

参考文献等

[1] 硲文夫「理工系の基礎数学」培風館

[2] D. コックス, J. リトル, D. オシー
「グレブナ基底と代数多様体入門（上）」丸善

[3] 「数学セミナー 1995 年 6 月号」日本評論社

[4] 「本日の料理は“多項式による近似”です」
安田富久一　第 84 回数学教育実践研究会　講演

[5] Adobe - アドビ システムズ - 日本
`http://www.adobe.com/jp/`

[6] From Bézier to Bernstein
`http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-bezier`

[7] ベジェ曲線 - Wikipedia
`http://ja.wikipedia.org/wiki/ベジェ曲線`