

第92回数学教育実践研究会 レポート発表

大風呂敷を広げる

北海道札幌南高等学校教諭 長尾良平

平成27年1月31日 ニッセイMKビル

1 始めに

新教育課程で、数学Aに立体図形が設定され、**オイラーの多面体定理**が紹介されている。大学の講義で印象に残っている事柄は多いが、オイラーの多面体定理もその1つであり、幾何特論Aの講義で面白いなあと感じたことを覚えている。

前任校並びに現任校での実践例を紹介していきたい。

2 いろんな多面体

授業では多面体定理に3時間を当てたが、まず

- 折り紙や爪楊枝で作製した多面体
- 各地のお土産（箱・さいころ）

などを教室に持ち込み、頂点・辺・面の数を数えるところから始めた。教科書に多面体定理が載っているので結果を知っている生徒も多いが、

- 普段あまり**立体図形に触れる機会が無い**
- 多面体が**折り紙・爪楊枝で作られている**
- 教科書で扱うものより**複雑な立体である**

ためか提示した立体に対する興味が強く、複雑な立体に対しても夢中になって数えていた。

前任校では冬休み明けの3年生の授業で実施したため時数に余裕もあり、また、「**自分でも多面体を作りたい**」との声があったので、その作業も授業に取り入れた（ユニット折り紙[1]で作製 or ペパクラビューワー[7]による展開図を利用）。

数え上げた結果

多面体の種類	V	E	F
正4面体	4	6	4
正6面体	8	12	6
正8面体	6	12	8
正12面体	20	30	12
正20面体	12	30	20
24面体	14	36	24
60面体	32	90	60
ミラーボールさん (ダイヤモンドカプセル)	56	136	82
アルクマさん (アルクマリんごクッキー)	32	72	42
クネクネさん (水戸芸術館タワー)	34	90	58



図1: 正多面体各種



図 2: とんころ (飛騨高山 真工藝 [8])



図 6: ダイヤモンドカプセル [10]



図 3: ペーパークラフト地球儀 [9]

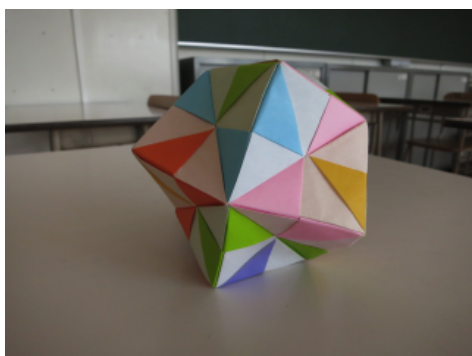


図 4: 24 面体 [1]



図 5: 60 面体 [1]

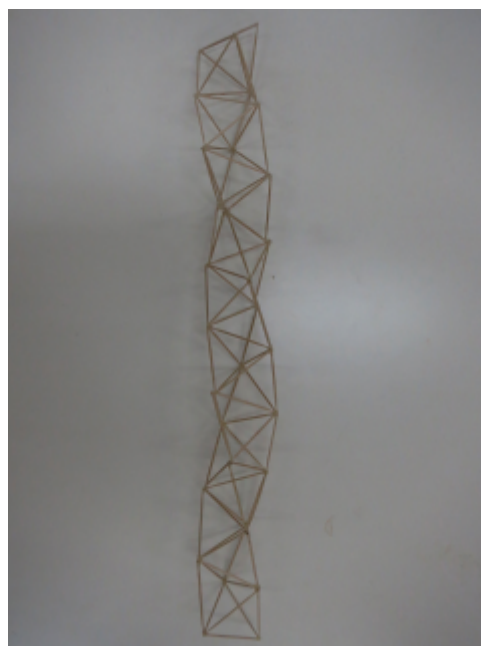


図 7: 水戸芸術館タワーの爪楊枝モデル [6][12]

生徒達が楽しそうに数えているので、その時間を多めにとった。特段指示せずにその作業を見守っていたが、生徒達は**立体の対称性を考慮して**効率的に数えようとしていた。

2クラスで実施し、ミラーボールとアルクマは正解に到達し、水戸芸術館タワーは到達できなかった。後者は正三角形のみで構成されているため、混乱しやすいのだと思われる。

最近、100均や出先で入ったお店で**変わった形の立体を探して購入するのが趣味の1つ**になってしまっている。筆者はこのことを「箱買い」と呼んでいる（本来の意味と異なるが・・・）。

（注）アルクマりんごクッキーの箱の画像は、諸事情により掲載できないのでWebで検索していただきたい。図14の立体とほぼ同じ形状である。

3 多面体定理の証明

筆者が習った証明は次のようなものである.

1. 多面体を球面 S^2 に位相変形
2. $S^2 - \{(0, 0, 1)\}$ を平面に立体射影
3. 平面上で $V - E + F = 1$ を示す

筆者は立体射影に対して

「大風呂敷を広げる」

というイメージを持っているので, そこから話を組み立てていった.

なお, 大山斉先生は [4] において段階を踏んだ丁寧な説明を, また, 中村文則先生は [5] において「立体を上から覗き込む」という発想で立体から平面に落とし込む手法を, それぞれ述べられている.



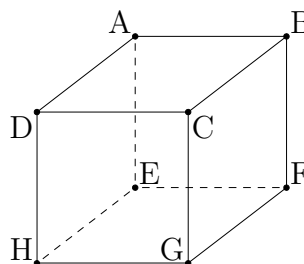
図 8: 立体を包んでいる風呂敷を



図 9: 広げるイメージで . . .

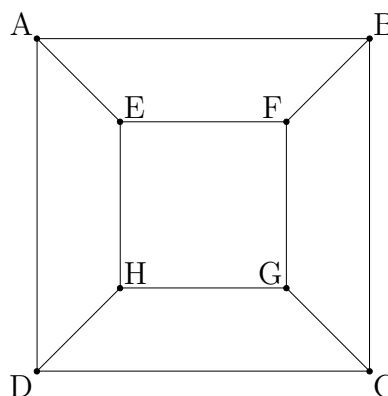
授業では, 平面上のグラフにおいて, **辺を除去しても $V - E + F$ が一定**であることを立方体の場合で具体的に操作をしながら説明を進めた.

- (1) 立体から平面に移行します



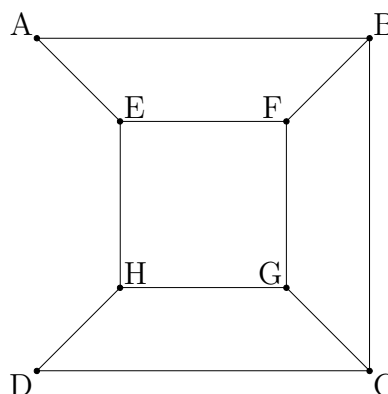
$$V - E + F = 8 - 12 + 6 = 2$$

- (2) 面 ABCD で切り開くと . . .



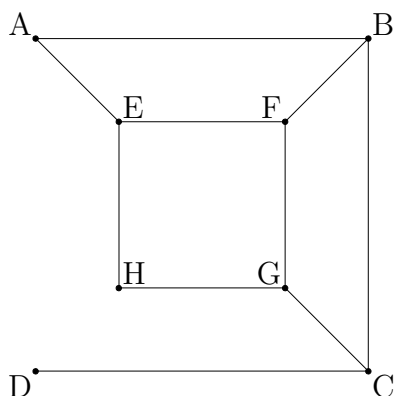
$$V - E + F = 8 - 12 + 5 = 1$$

- (3) 線分 AD を消去すると . . .



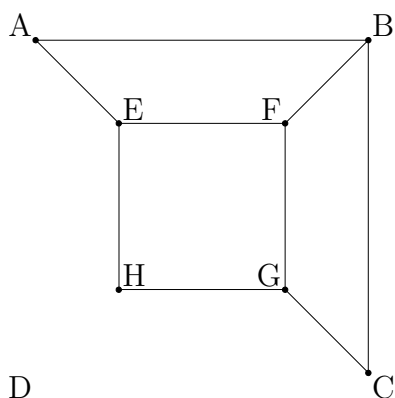
$$V - E + F = 8 - 11 + 4 = 1$$

(4) 線分 DH を消去すると・・・



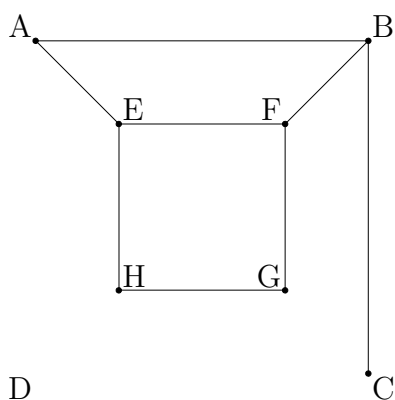
$$V - E + F = 8 - 10 + 3 = 1$$

(5) 線分 CD を消去すると・・・



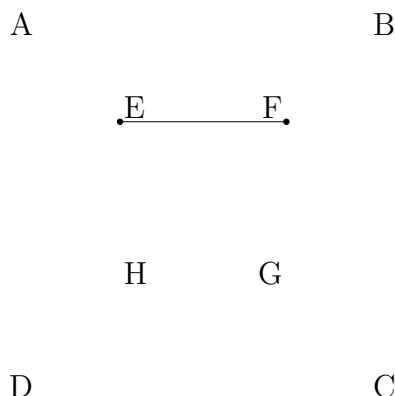
$$V - E + F = 7 - 9 + 3 = 1$$

(6) 線分 CG を消去すると・・・



$$V - E + F = 7 - 8 + 2 = 1$$

(7) 行きつく先は・・・



$$V - E + F = 2 - 1 + 0 = 1$$

同様に考えて、膨らまして球面にできる立体では多面体定理が成り立つことが分かる。

「大風呂敷を広げて立体から平面に移る」場面は何度か実演し、「 $\{(0, 0, 1)\}$ を含む面」が周囲に散ってしまい面の総数が1つ減ることを強調した。

また、先に実施したクラスでは一般的に $V - E + F$ で処理したが（具体的な立方体を扱っているのに一般的に処理すると、かえって分かりづらいようだったので）、後のクラスでは $8 - 11 + 4 = 1$ というように具体的な数値で説明を行った。

4 多面体定理の応用

授業では、多面体定理の応用として

- 正多面体が5種類に限られること
- サッカーボールを構成する正多角形

について取り上げた。

前者については、正 m 角形を n 個使用するとし、1つの頂点に集まる正多角形の個数を k とすると、

$$F = n, E = \frac{mn}{2}, V = \frac{mn}{k}$$

が成り立つ。この結果を多面体定理に代入して整理すると、

$$\{(k - 2)m - 2k\}n = -4k$$

となる. ここから, m, n の値を求めていくが, まず k の値について絞り込む. 授業では, 具体例を見せながら多面体が出来るための条件として $k = 3, 4, 5$ を導いた.

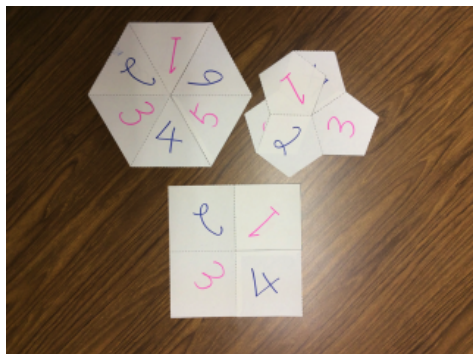


図 10: 正多角形ができるためには・・・

整数 m, n については, $m \geq 3, n \geq 4$ に注意しながら, 1 次不定方程式の整数解を求めていく.

- $k = 3$ のとき $(m - 6)n = -12$ となるので

$m - 6$	-3	-2	-1
n	4	6	12

これより, $(m, n) = (3, 4), (4, 6), (5, 12)$

- $k = 4$ のとき $(m - 4)n = -8$ となるので

$m - 4$	-1
n	8

これより, $(m, n) = (3, 8)$

- $k = 5$ のとき $(3m - 10)n = -20$ となるので

$3m - 10$	-1
n	20

これより, $(m, n) = (3, 20)$

以上より, 正多面体は 5 種類に限られることが分かる.

後者については, 100 均で購入したサッカーボールのおもちゃを提示し, 正 5 角形と正 6 角形が何個ずつ使われているか問いかけた上で説明に入った (サッカー部員にも聞いてみたが, 知っている生徒はいなかった).



図 11: 何個ずつ使ってるのかな?

正 5 角形が x 個, 正 6 角形が y 個だとすると,

$$F = x + y, E = \frac{5x + 6y}{2}, V = \frac{5x + 6y}{3}$$

が成り立ち, 多面体定理に代入して整理すると y が消えて

$$x = 12$$

を得る. サッカーボールを観察すると, x, y について

$$x : y = 3 : 5$$

が成り立つことが分かるので, $x = 12$ を代入して $y = 20$ を得る.

サッカーボールは正 20 面体の各頂点付近を切り落とした多面体 (切頂 20 面体) を膨らませたものである. 実際に作製したものを提示すると, 生徒の反応が良い. また, 正 20 面体との関係もよく分かる.

サッカーボール	正 5 角形 : 12	正 6 角形 : 20
正 20 面体	頂点 : 12	面 : 20

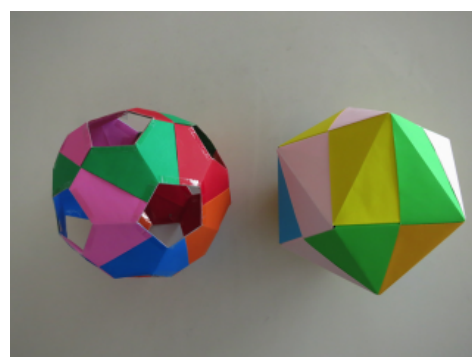


図 12: 正 20 面体とサッカーボール

5 終わりに

筆者が大学時代に印象に残った多面体定理に関することについて、少し時間をかけて授業で扱った。具体物を手にしながら試行錯誤できるので、生徒達も楽しみながら積極的に活動していた。今後も、授業の中に**作業的活動を取り入れて**いきたい。

多面体定理の応用として、正多面体とサッカーボールを取り上げた。これは、図形の問題の中に数え上げ（と前者は不定方程式の整数解も）が現れる分野融合問題であり、**数学 A のまとめ**として格好の教材だと考えるからである。**「数学 A の全てがこの問題にある」と言ったら大風呂敷を広げ過ぎ**だろうか。

なお、本実践の時期には教育実習生の指導を担当しており、平面図形を実習生にお願いし、立体図形から自分が引き継いだ。本実践については彼からもアドバイスをもらい、また、2つの多面体を授業実習で忙しい中作製し、寄贈してくれた。実習生の中川篤君に感謝申し上げる。



図 13: 60 面体



図 14: アルクマさん多面体

参考文献等

- [1] 「折り紙算数・折り紙数学（数学教室 別冊3）」
数学教育協議会編 国土社
- [2] 大野寛武「つまようじで立体を作ろう」
NHK わくわく授業：わたしの教え方
- [3] 大野寛武「つまようじで多面体をつくろうー
Yogeometry（ヨージオメトリー）のすすめ」
数学教育 2010 年 8 月号 明治図書
- [4] 大山斉「正多面体の種類」
第 27 回数学教育実践研究会レポート
- [5] 中村文則「多面体定理のちょっとした小手技」
数学教育実践研究会レポート
- [6] 長尾良平「振じれた話」
第 88 回数学教育実践研究会レポート
- [7] 多摩ソフトウェア有限会社
<http://www.tamasoft.co.jp/>
- [8] 飛驒高山 真工藝
<http://shinkougei.sblo.jp/>
- [9] 東京カートグラフィック株式会社
<http://www.tcgmap.jp/>
- [10] 株式会社三洋堂
<http://www.sanyodo.ne.jp/>
- [11] 豊上製菓株式会社
<http://www.hojo-seika.jp/>
- [12] 水戸芸術館
<http://arttowermito.or.jp/>