

第88回数学教育実践研究会 レポート発表

振じれた話

北海道室蘭東翔高等学校教諭 長尾良平

平成26年1月25日 ニッセイMKビル

1 始めに

去年の夏、知人と数学の話をしていた際、ひょんなことからテトラパックの形状の話になった。最近は目にする機会も少なくなったが、テトラパックは牛乳容器として馴染みのある存在である。

筆者はテトラパックが正四面体であるとずっと思っていたのだが、どうもそうではないらしい。興味が湧いたので、計算や工作をして検証してみた。それらについて紹介していきたい。

2 正四面体でないこと

知人によると、「**テトラパックは、底面が正三角形の三角柱に隙間無く詰め込む（充填する）**」ことができるとのこと。筆者が考えていた

テトラパック = 正四面体

では、この性質が成り立たない。まず、このことを確認したい。

正三角形を平面に敷き詰めたものが図1である。この図において、縦線に沿って折り、両端を接着して三角柱を作ること考える。その際、単純に貼り合わせると、線分PQと点Rが合うことになる。**正四面体を作るためには、線分PQと線分RSが出会わなければならない、その際には「捻れ」が生じる。**よって、正四面体は底面が正三角形の三角柱を充填することができず、テトラパックは正四面体でないことが分かる。

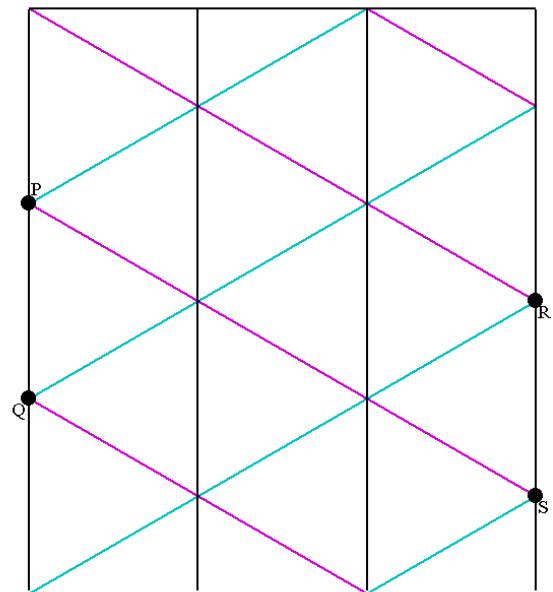


図1: 正三角形を敷き詰めてみた場合

なお、この考察において、正四面体を構成するように**捻れを生じさせながら張り合わせて**できる立体を Boerdijk-Coxeter helix という。この構造を持つ例として、**水戸芸術館タワー**（図2）が挙げられる。このタワーは

- 正四面体を28個連結
- 1辺9.6mの正三角形を57枚張り合わせた
☞ 1.5mm厚のチタンパネルを使用

という構成であり、水戸市制100周年を記念して地上100mの高さになっている（正月に神戸に帰省した後、関東に足を延ばして実物を見学）。



図 2: 水戸芸術館タワー

爪楊枝とグルーガンを利用する Yogeometry (楊枝+ジオメトリー) による作例が図3である.

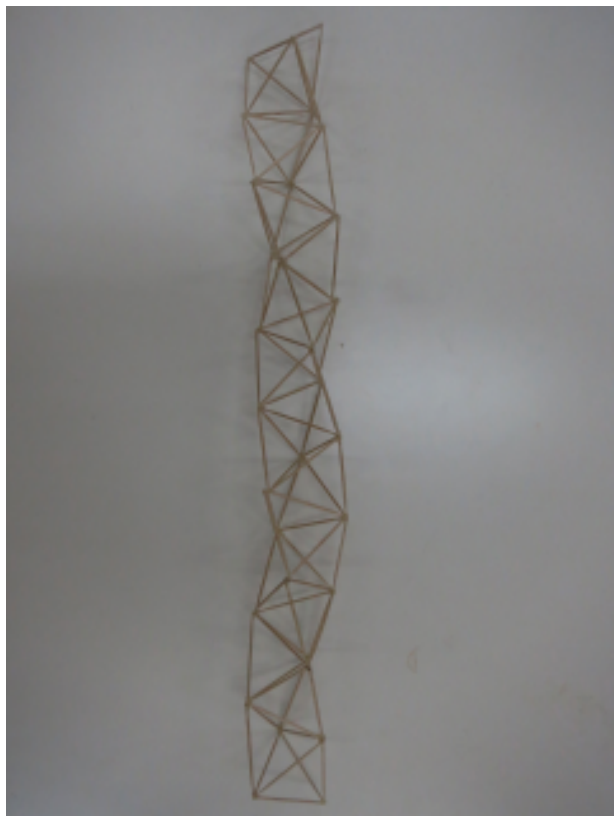


図 3: 爪楊枝を 90 本使いました

3 三角柱に充填するためには

正四面体のケースでまずかったのは, 平面図を張り合わせて三角柱にしたときに, **線分同士が出会わず「捻れ」が生じる点**であった. そこで, 張り合わせた際, **自然に線分同士が会おうように**改良したものが図4である.

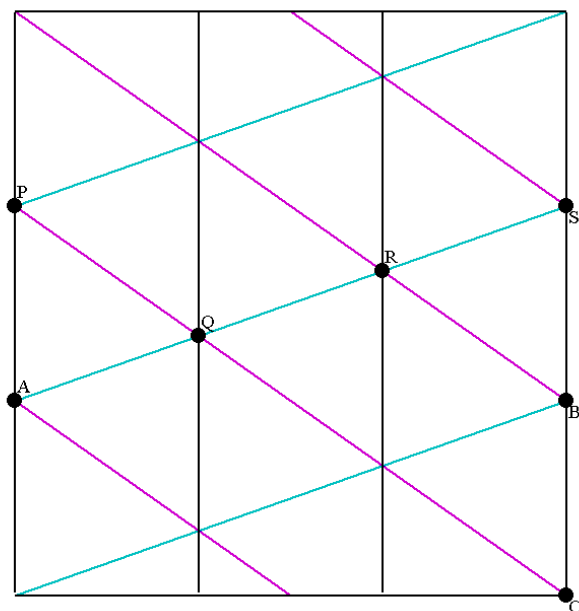


図 4: 線分同士が会おうように改良

三角柱にしたとき, 3辺 **PQ**, **QR**, **RS(=RP)** で 1つの面 ($QR = RS$ の二等辺三角形) が作られる. PA の長さの選び方は一意には定まらないが, 四面体の他の面も同じ二等辺三角形にするためには, $PA = \text{QR}$ であれば良い.

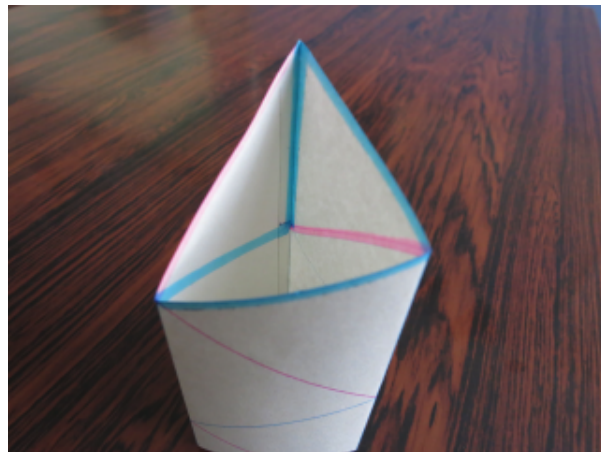


図 5: $PA = QR$ の場合

次に、QRとPQの長さを求める。三角柱の底面が1辺の長さ1である正三角形とすると、 $AB = 3$ である。QR = x とおくと、 $\triangle ABS$ において

$$3^2 + x^2 = (3x)^2$$

が成り立ち、これを解いて、

$$x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

を得る。

続けて、PQ = y とおくと、 $\triangle PSC$ において

$$3^2 + \left(2 \times \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = (3y)^2$$

が成り立ち、これを解いて、

$$y = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

を得る。

$$\begin{aligned} x : y &= \frac{3\sqrt{2}}{4} : \frac{\sqrt{6}}{2} \\ &= \sqrt{3} : 2 \end{aligned}$$

であるから、3辺の長さに関して $\sqrt{3} : \sqrt{3} : 2$ である二等辺三角形を作ればよいことが分かる。

なお、PA = PQとした場合には、同様の計算によって、3辺の長さに関して $\sqrt{3} : \sqrt{3} : \sqrt{2}$ の二等辺三角形と $\sqrt{3} : \sqrt{2} : \sqrt{2}$ の二等辺三角形をそれぞれ2枚ずつ使用する四面体となることが分かる。



図 6: PA = PQ の場合

4 めでたしめでたし・・・！？

3辺の長さの比が分かったので、四面体を複数作成し、実際に三角柱に充填できることが確認できた。

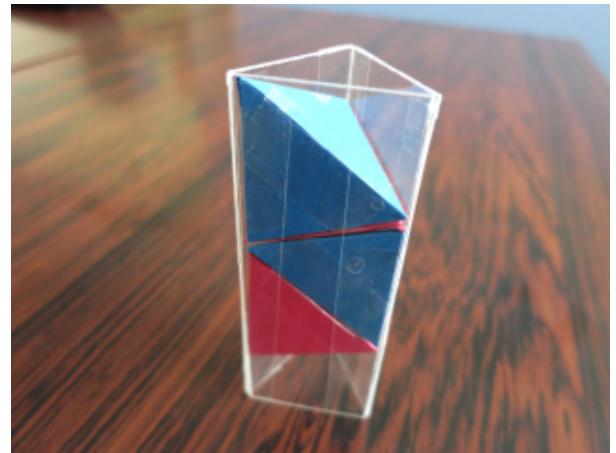


図 7: 充填できるのが何か不思議・・・

しかし、**思わぬ事態に遭遇**した。それは、

作成した四面体がテトラパックらしくない

ということである。四面体を眺めてみると、どうも**歪んで**見える。

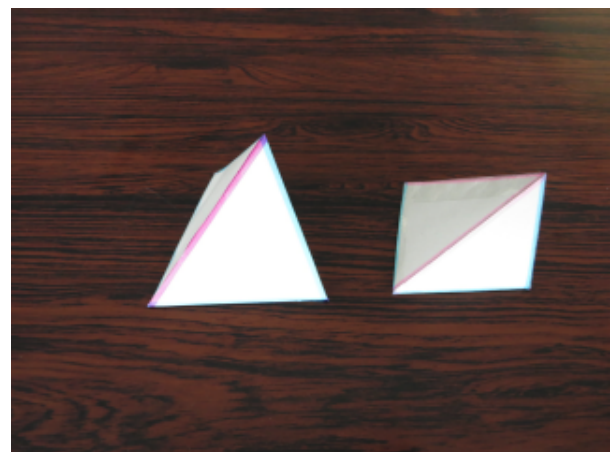


図 8: 何か違うなあ・・・

そこで、テトラパックの実物を入手しようとスーパーをまわってみるが、取り扱っていない。Webで情報を集めると**べつかい乳業興社**でテトラパック型容器(図9)での販売を行なっていることが分かったので、早速お取り寄せしてみた。

また、スーパーを物色しているとテトラ型包装を利用している和菓子を見つけた。



図 9: ごちそうさまでした

牛乳を美味しくいただいた後に、3 辺の長さを大まかに測ってみると、

12cm : 12cm : 10cm

であり、計算で求めた $\sqrt{3} : \sqrt{3} : 2$ とは明らかに異なっていた。そこで、さらに情報を集めていたら tamami さんの Web サイトに辿り着いた。

彼女は Web や書籍におけるテトラパックについての記述に違和感を感じており、調査されている。彼女の Web サイトを参考に、筆者も次の 3 冊について改めて読んでみた。

- 続・数理パズル
- 数学にさわろう！ Mathematical Art 展
- 数学教育 2007 年 1 月号

読んでいくと、「続・数理パズル」に $\sqrt{3} : \sqrt{3} : 2$ の三角形 4 枚からなる四面体の展開図が平行四辺形になることが触れてあり、

それをくるくると巻くように折れば、市販の牛乳の紙容器のような四面体を能率よく作ることができます。

という記述がある。それが、いつのまにか

テトラパック = 三角柱を充填する四面体

というふうに話が振じれてしまったように思われる・・・。

5 終わりに

知人との会話から始まった考察であったが、予想していなかった事態になってしまった。さらに情報を集めて、事の経緯を調べてみたいと考えている。

レポートの作成に際しては、いろいろ模型を作ったり、水戸芸術館タワーを実際に訪問したりと楽しい探究活動を行うことができた。今まで、あまり立体幾何についてきちんと考える機会が無く、今回の一連の活動は良い経験になった。

また、新課程では数学 A に立体幾何が設定されたので、普段の授業に還元できれば良いなと考えている。オイラーの多面体定理の題材として、Boerdijk-Coxeter helix を紹介してみるのも面白いと思う。

(注) 日本テトラパック株式会社では所謂テトラパックをテトラ・クラシックと呼んでおり、現在は製作していない。

参考文献等

- [1] 中村義作・小林茂太郎・西山輝夫
「続・数理パズル (中公新書)」中央公論社
- [2] 「数学にさわろう！ Mathematical Art 展」
Mathematical Art 展図録編集委員編
- [3] 小森弘三「テトラパックと空間充填」
数学教育 2007 年 1 月号 明治図書
- [4] 大野寛武「つまようじで多面体をつくろうー
Yogeometry (ヨージオメトリー) のすすめ」
数学教育 2010 年 8 月号 明治図書
- [5] Tetra's
<http://homepage3.nifty.com/tetratamami/index.htm>
- [6] 日本テトラパック株式会社
<http://www.tetrapak.com/jp>
- [7] べつかい乳業興社
<http://betsukai-milk.com/>
- [8] 水戸芸術館
<http://arttowermito.or.jp/>