第83回数学教育実践研究会　レポート発表

無駄な？ 努力

北海道室蘭東翔高等学校教諭　長尾良平

平成24年12月1日　アスティ45ビル

1　始めに

普段の授業においては, 構築された理論に従って（一応）理路整然と授業を行なうが, 昔の数学者になったつもりで**泥臭い計算や実験をやってみるのも悪くない**と思う.

本レポートでは, 筆者が行なった実践を幾つか紹介していきたい. 具体例を生徒達に見せることによって, 彼等の理解が深まるのではないかという淡い期待も抱いている.

2　実践例から

例1　分数を循環小数に直す計算があるが, 教科書の練習問題が早くできた人向けに, 毎年1/23を出題している.

$$\begin{aligned}\frac{1}{23} &= 1 \div 23 \\ &= 0.0434782608695652173913043\ldots \\ &= 0.\underbrace{\dot{0}43478260869565217391\dot{3}}_{\text{循環節 22 桁}}\end{aligned}$$

鳩の巣原理を用いると, 有理数 m/n を循環小数に直したとき,

$$\text{循環節の長さ} \leqq n-1$$

であることが容易に示されるが, この例は等号が成立する場合となっている.

生徒は同じ余りがなかなか出現しないので, 不安げな表情で計算を続ける. ここまで循環節が長くなるとは想定していないので, **計算がノートからはみ出してしまい, 机に続きを書く生徒**が今年度は現われた.

例2　お金やさいころを何回も投げて確率を考える. たまには, 黙々と500回や1000回投げてみるのもいいものである.

硬貨2枚を500回投げた結果は

表の枚数	0枚	1枚	2枚
回　数	123	245	132
相対度数	0.246	0.49	0.264

となり, さいころ1個を1000回投げた結果は

出 た 目	1	2	3	4	5	6
回　数	203	163	151	146	145	192
相対度数	0.203	0.163	0.151	0.146	0.145	0.192

となった. この実践は教員1年目に行なったものであるが, **帰省した神戸の実家で黙々と投げ続ける筆者を見て親が呆れていた**のを覚えている.

授業では, **「数学を志した者としては一度は投げておかないとね〜」**と言いながらグラフ化したものを生徒に提示した.

理論値と近いことに納得する生徒や値にばらつきがあることを不思議がる生徒, データを取るのにどれくらい時間がかかったのかに興味を持つ生徒など, 様々な反応があって楽しい.

例3　クラスに同じ誕生日の人がいる確率を**実際のクラス名簿で確認**してみる. n人のクラスで誕生日が同じ人がいる確率は

$$1 - \frac{{}_{365}\mathrm{P}_n}{365^n}$$

であり, CASIOの高精度計算サイトによると,

人数	確率	人数	確率
35	0.8144	38	0.8641
36	0.8322	39	0.8782
37	0.8487	40	0.8912

となる．平成 20 年度からの 5 年間について調べてみたところ（各年度ともに 15 クラス），

状況	相対度数	補正した確率
13 / 15	0.8667	0.8768
12 / 15	0.8000	0.8842
11 / 15	0.7333	0.8749
11 / 15	0.7333	0.8788
11 / 15	0.7333	0.8770

のようになった．人数が 40 人未満のクラスもあるので, その分を補正した確率も表には示してある．

片っ端からチェックしていくので, **必要なものは気合いのみ**である．慣れてくると 1 クラスにつき 5 分程度でチェックできるようになった．

授業で「このクラスには同じ誕生日の人がいるね〜」と言うと,「誰と誰？」という感じで盛り上がる．

例 4　2^{100} の桁数については, 常用対数 $\log_{10} 2$ の応用例として扱われるが, **本当に 31 桁なのか確かめるべく, 手計算**を実行した．

2 を 100 回かけるのは大変なので, 実際は

$$2^{100} = (2^{20})^5 = 1048576^5$$

を計算した．

$$2^{100} = 1267650600228229401496703205376$$

であるが, **一度は計算ミスをしてしまい, 計算をやり直して**いる・・・. きちんと升目の入った紙で計算をしなかったのが敗因である．

授業では, その計算結果と大きな数・小さな数の単位をまとめたプリントを配布している．生徒には,「ありえない・・・」,「先生ヒマ人！」,「馬鹿だぁ〜」などと**呆れられる**.

3　授業を終えて

数学者ガウスは多くの功績を残したが, 莫大な計算に基づくものも少なくない．

> 算術幾何平均 $M(\sqrt{2}, 1)$ と π/l が 11 桁一致することが分かった．この事実の証明は解析学の全く新しい分野を開くことは間違いない．

大数学者ガウスを引き合いに出すのも恐れ多いが, **計算や実験をすることによって見えてくるものを大事にしたい**. また, 定義や定理から導かれた結果を**具体例で確かめる**ことは, 理解するためにも欠かせないと思う．

生徒に興味をもたせたり印象づけたりしようと思って行なった実践だが, 実のところ**筆者自身が一番楽しんで**いる．また, 生徒には**「数学を志した者としては・・・」**と冗談めかして話しているが, 本心では大事なことだと思っている．

学年末に生徒に行ったアンケートにおいて, 印象に残ったこととして**「先生の無駄な努力」**と答えた生徒がいた．アンケートに書いてもらえたということは, **無駄ではなかった**ことの証ではないだろうか.

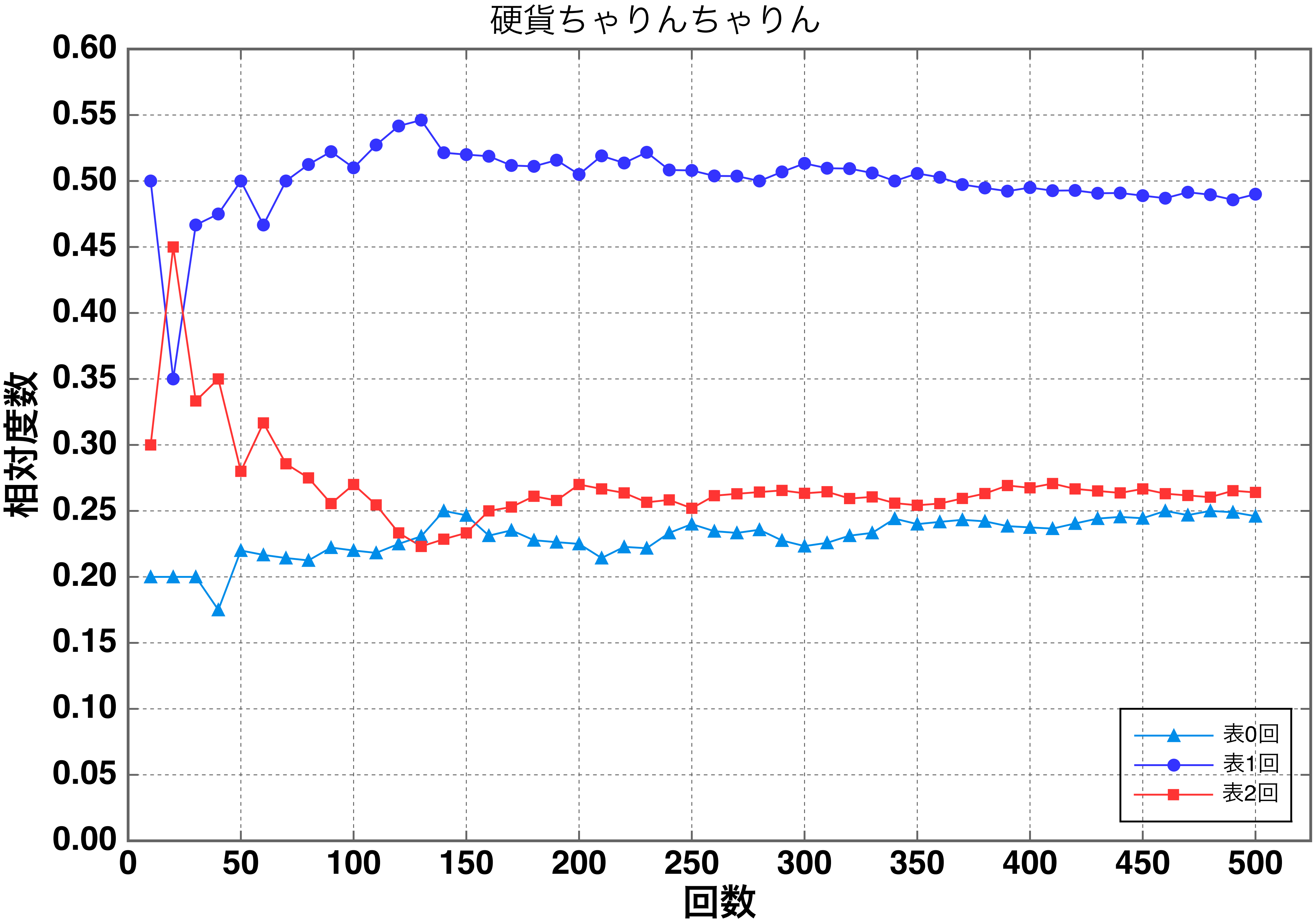
これからも, 素朴な好奇心や興味を大切にしていきたい．

参考文献等

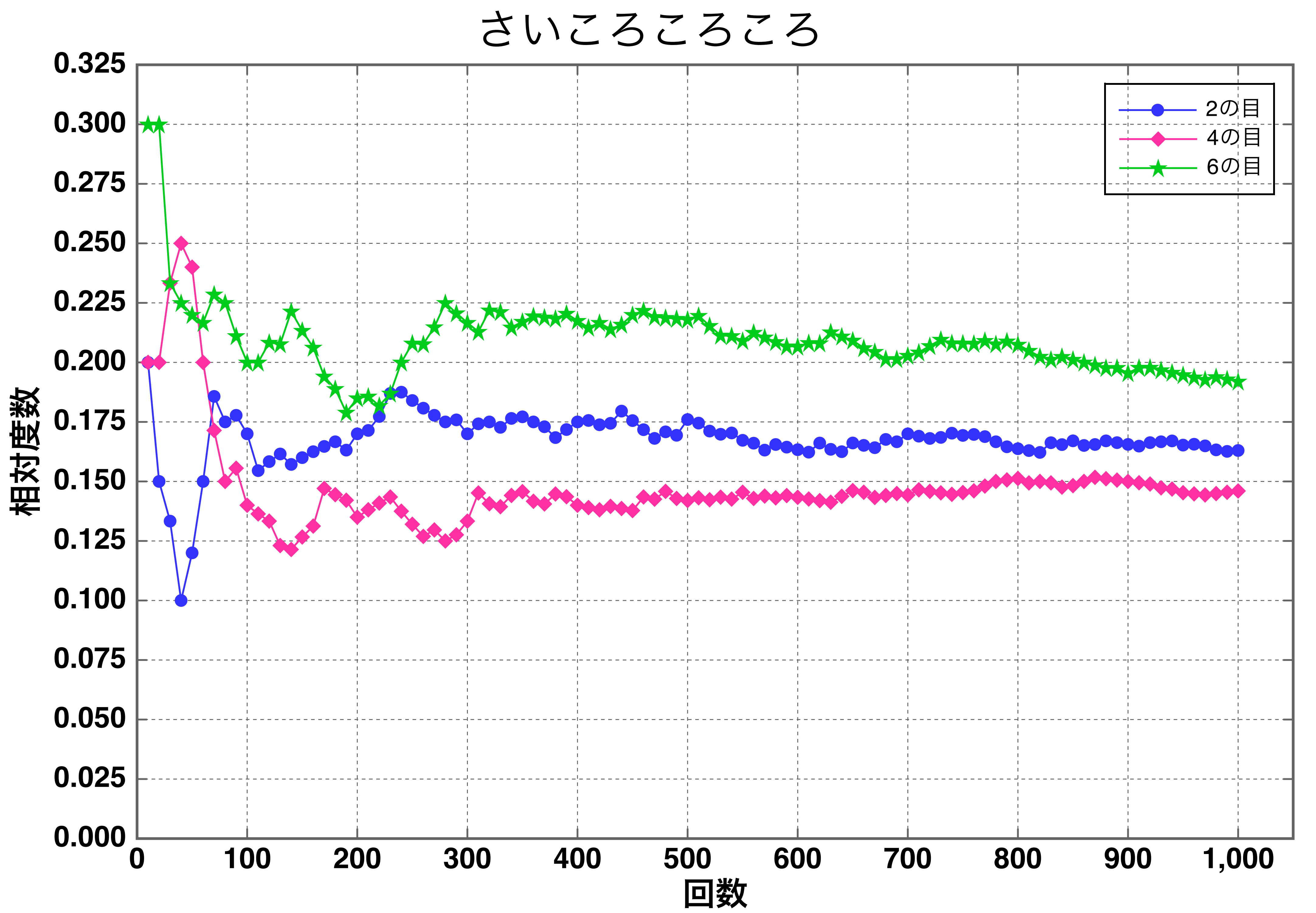
[1] 高木貞治「近世数学史談」岩波書店

[2] 「数学セミナー 1994 年 11 月号」日本評論社

[3] 高精度計算サイト `http://keisan.casio.jp/`



硬貨ちゃりんちゃりん
相対度数
回数
0.60
0.55
0.50
0.45
0.40
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
50
100
150
200
250
300
350
400
450
500
表0回
表1回
表2回


さいころころころ
0.325
0.300
0.275
0.250
0.225
0.200
0.175
0.150
0.125
0.100
0.075
0.050
0.025
0.000
相対度数
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1,000
回数
2の目
4の目
6の目

$2^{100} = (2^{10})^{10} = (1024)^{10}$

$= (1024^2)^5 = (1048576)^5$

```
      1048576
    × 1048576
    ---------
      6291456
     7340032
    5242880
   8388608
  4194304
 10485760
-------------
1099511627776
```

```
          1099511627776
        × 1099511627776
        ---------------
             6597069766656
            7696581394432
           7696581394432
          7696581394432
         ~~7696581394432~~
         2199023255552
        6597069766656
       1099511627776
      1099511627776
     5497558138880
    9895604649984
   9895604649984
  10995116277760
--------------------------
1208925819616388393310 6176
```

```
        1208925819616388393310 6176
  ×                         1048576
  ---------------------------------
      7253554917698330359863 7056
     8462480737314718753174 3232
    6044629098081941966553 0880
   9871406556931107146484 9408
  4835703278465553573242 4704
 12089258196163883933106 1760
-----------------------------------
1267650600230074075904074605376
```

まちがいでした…

```
          6597069766656
         7696581394432
        7696581394432
       7696581394432
      2199023255552
     6597069766656
    1099511627776
   1099511627776
  5497558138880
 9895604649984
9895604649984
10995116277760
---------------------------
120892581961462917470 6176
```

1099511627776
×1099511627776

をやり直しました

```
      1208925819614629174706176
  ×                     1048576
  -----------------------------
       7253554917687775048237056
      8462480737302404222943232
     6044629098073145873530880
    9671406556917033397649408
   4835703278458516698824704
  12089258196146291747061760
-------------------------------
1 26,7650,6002,2822,9401,4967,0320,5376   ← 2^100
   穣    秭    垓    京    兆    億    万
```

10^n について

組　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

§1. 大きな数の単位

単位	読み	10^n	
一	いち	10^0	
十	じゅう	10^1	
百	ひゃく	10^2	
千	せん	10^3	
万	まん	10^4	← 赤道の長さが約 4 万 km
億	おく	10^8	← 世界の人口が約 60 億人
兆	ちょう	10^{12}	← 日本の国家予算が約 80 兆円
京	けい	10^{16}	← 銀河の直径が約 90 京 km
垓	がい	10^{20}	
秭	じょ	10^{24}	
穣	じょう	10^{28}	
溝	こう	10^{32}	
澗	かん	10^{36}	
正	せい	10^{40}	
載	さい	10^{44}	
極	ごく	10^{48}	
恒河沙	ごうがしゃ	10^{52}	← ガンジス川の砂（の意味）
阿僧祇	あそうぎ	10^{56}	← 数えられない（の意味）
那由他	なゆた	10^{60}	
不可思議	ふかしぎ	10^{64}	← 思考の範囲を越えている（の意味）
無量大数	むりょうたいすう	10^{68}	

1 無量大数は,

$$1\underbrace{00000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000}_{68\text{個}}$$

です.

1 無量大数円を全部 1 円玉で考えると, 1 円玉が 10^{68} 枚. 1 円玉の厚さを 1mm とすると $1\text{mm} = 10^{-3}$ m $= 10^{-6}$ km だから, 1 無量大数円の厚さを km で考えると $10^{68} \times 10^{-6} = 10^{62}$ km となります.

1 光年が 9.4608×10^{12} km なので, 10^{62} km は, $10^{62} \div (9.4608 \times 10^{12}) \fallingdotseq 10^{49}$ より 10^{49} 光年, つまり光が 10^{49} 年かかって進む距離（よう分からん？）になります.

ちなみに, 宇宙の地平線までの全体積は 1.2×10^{79} m^3 である（らしい）.

§2. 小さな数の単位

単位	読み	10^n	
一	いち	10^0	
分	ぶ	10^{-1}	
厘	りん	10^{-2}	
毛	もう	10^{-3}	← け
糸	し	10^{-4}	← いと
忽	こつ	10^{-5}	← たちまち
微	び	10^{-6}	← わずかな
繊	せん	10^{-7}	← 繊維
沙	しゃ	10^{-8}	← 水辺の砂
塵	じん	10^{-9}	← ちり
埃	あい	10^{-10}	← ほこり
渺	びょう	10^{-11}	← かすんでいること
漠	ばく	10^{-12}	← ぼんやりしていること
模糊	もこ	10^{-13}	← あいまいなこと
逡巡	しゅんじゅん	10^{-14}	← 決断がつかないこと
須臾	しゅゆ	10^{-15}	← しばらくの間
瞬息	しゅんそく	10^{-16}	← 瞬きをし, 息をする間
弾指	だんし	10^{-17}	← 曲げた指の爪の先を親指の腹にあてて音を立てること
刹那	せつな	10^{-18}	← 短い時間
六徳	りっとく	10^{-19}	← 知・仁・聖・義・忠・和 or 礼・仁・信・義・勇・知
虚空	こくう	10^{-20}	← 一切が存在する空間
清浄	せいじょう	10^{-21}	← 煩悩や悪行が無く, 心身が清らかであること

「埃」〜「無量大数」は, 吉田光由（みつよし）による, 江戸時代のベストセラー『塵劫記（じんこうき）』に載っています. 塵劫記の「劫」とは約 50 億年のことです. 小咄「寿限無（じゅげむ）」の中にも出てきます.

「寿限無、寿限無、五**劫**の擦り切れ、海砂利水魚の水行末、雲行末、風来末、食う寝るところに住む所、薮ら小路ぶら小路、パイポ、パイポ、パイポのシューリンガン、シューリンガンのグーリンダイ、グーリンダイのポンポコピーのポンポコナーの長久命の長助」