

第134回数学教育実践研究会 レポート発表

実力テストで One more thing 3

北海道室蘭栄高等学校教諭 長尾良平

令和7年8月30日 Online 数実研

1 はじめに

第130回・第132回数実研で発表した[1][2]の続きである。本稿では、筆者が札幌南高校に勤務していた一昨年度までの10年間で作問したものの中から、解析分野に属すると考えられる問題について、出題意図を交えながら幾つか紹介してみたい。

2 実際の問題から

解析分野は、(大学入試での出題頻度に比例して)微積分の問題を作問することが多かった。出題分野のくじ引きの関係もあり、指数・対数の問題を作問することは少なく、三角関数については(小問集合を除き)結局1回も作問する機会は無かった。

- 指数・対数
- 微積分
- 複素数平面

の順に紹介していきたい。

問1 3^{80} は何桁の数であるか。また、その数の最高位とその次の桁の数を答えよ。なお、次の値を用いて良い。 $\log_{10} 2 = 0.3010$ $\log_{10} 3 = 0.4771$ $\log_{10} 7 = 0.8451$

意図 「常用対数の利用」と「不等式評価」が主題である。

$$3^{80} = (10^{0.4771})^{80} = 10^{38.168}$$

だから、39桁であることは直ぐに分かる。次に、

$$3^{80} = 10^{0.168} \cdot 10^{38}$$

なので、数字の並びは $10^{0.168}$ を観察すれば分かる。

$$\begin{aligned}\log_{10} 1.4 &= \log_{10} 2 + \log_{10} 7 - \log_{10} 10 \\ &= 0.3010 + 0.8451 - 1 = 0.1461\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 1.5 &= \log_{10} 3 - \log_{10} 2 \\ &= 0.4771 - 0.3010 = 0.1761\end{aligned}$$

の2つの計算によって、

$$1.4 \cdot 10^{38} < 10^{0.168} \cdot 10^{38} < 1.5 \cdot 10^{38}$$

が成り立つので、上二桁は14と分かる。不等式評価出来るように、3の何乗にするか思案したことを思い出した。

問2 x を実数とするとき、方程式

$$[\log_2 x]^2 - [\log_2 x] - 2 = 0$$

を満たす x の範囲を求めよ。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表すものとする。

意図 「ガウス記号」と「対数不等式」の融合問題である(小問集合で出題)。

$$([\log_2 x] + 1)([\log_2 x] - 2) = 0$$

より、 $[\log_2 x] = -1, 2$ となる。このとき、

$$-2 \leq \log_2 x < -1 \text{ または } 2 \leq \log_2 x < 3$$

となるので、

$$\frac{1}{4} \leq x < \frac{1}{2}, 4 \leq x < 8$$

を得る。

問3 $x \cdot \log_3 2 = y$ を満たすような「4以上5以下の無理数 x 」と「有理数 y 」の値の組を1つ答えよ. なお, $\log_3 2$ が無理数であることは既知とする.

意図 「対数に関する基本的操作」の確認である(小問集合での出題だったが, 本当は記述式で出題したかった).

$x = 3 \log_2 3$ にとると, $\log_3 2$ が無理数だから,

$$x = \frac{3}{\log_3 2}$$

も無理数となる.

$x = \log_2 27$ であり, $16 < 27 < 32$ より

$$4 < x < 5$$

が成り立つ. このとき,

$$x \cdot \log_3 2 = 3 \log_2 3 \cdot \log_3 2 = 3$$

となり, $y = 3$ とすれば条件を満たす.

以上より, $(x, y) = (3 \log_2 3, 2)$

誤答で惜しかったのは, $x = \frac{5}{2} \log_2 3$ である.

$$x = \log_2 \sqrt{243} < \log_2 \sqrt{256} = \log_2 16 = 4$$

となり, 条件を満たさない(約 3.96 である).

問4 次の問いに答えよ.

(1) 円 $x^2 + y^2 = 4$ と放物線 $y = \sqrt{3}x^2$ との共有点の座標を求めよ.

(2) 円 $x^2 + y^2 = 4$ と放物線 $y = -\frac{1}{3}x^2$ との共有点の座標を求めよ.

(3) 次の連立不等式が表す領域 D を図示せよ.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ y \leq \sqrt{3}x^2 \\ y \geq -\frac{1}{3}x^2 \end{cases}$$

(4) 領域 D の面積を求めよ.

意図 「領域の図示が雑な生徒が多かった」ことと, 「センター試験の微積分で円が関係する問題がたまに出る」ことを念頭に置いて作問した.

領域 D を図示すると, 次のような図になる.

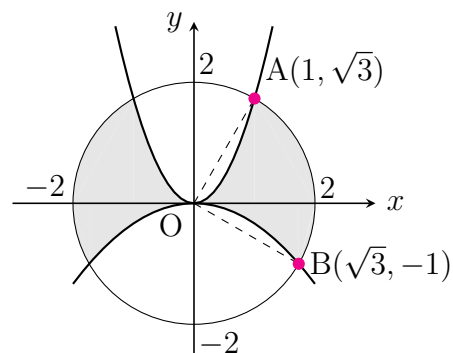


図 1: 領域 D

図形が y 軸対称なので, まず $x \geq 0$ の部分で考える. $OA \perp OB$ に注意すると,

$$\text{扇形 OAB} = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$$

となる. そこから余分な面積を引く.

$$\text{弓形 OA} = \int_0^1 (\sqrt{3}x - \sqrt{3}x^2) dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{弓形 OB} = \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{\sqrt{3}}x \right) dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

以上より, 求める面積 S は,

$$S = 2 \left(\pi - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{6} \right) = 2\pi - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる.

問5 $a > 0$ を定数とし, 2 曲線

$$C_1 : y = x^3 - 3a^2x, \quad C_2 : y = x^2$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(1) 増減表を作成し, C_1 の概形を書け.

(2) a の値によらずに, C_1 と C_2 は異なる 3 点で交わることを示せ.

(3) C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積の和が $\frac{73}{12}$ となるように, a の値を定めよ.

意図

- (2) で異なる 3 点で交わることをきちんと説明できるか

- (3) で共有点の座標を具体的に求めずに処理できるか

を確認する目的で出題した.

(2) は連立して出来る方程式が

$$x(x^2 - x - 3a^2) = 0$$

であり, $x^2 - x - 3a^2 = 0 \dots \textcircled{1}$ について

- 判別式が正であること
- $x = 0$ を解にもたないこと

を明確に示している答案を正答とした.

なお, 微積分の問題と考え, 極大・極小の議論に持ち込んだ答案もあったが, 極値が異符号であることに言及できている答案は殆どなかった.

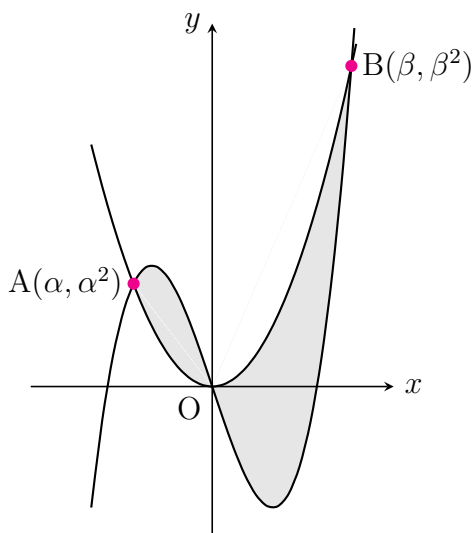


図 2: C_1 と C_2 で囲まれる部分

(3) は計算の概略を記すと,

$$S_1 = \int_{\alpha}^0 \{(x^3 - 3a^2x) - x^2\} dx = -\frac{\alpha^4}{4} + \frac{\alpha^3}{3} + \frac{3a^2}{2}\alpha^2$$

$$S_2 = \int_0^{\beta} \{x^2 - (x^3 - 3a^2x)\} dx = -\frac{\beta^4}{4} + \frac{\beta^3}{3} + \frac{3a^2}{2}\beta^2$$

より,

$$S_1 + S_2 = -\frac{1}{4}(\alpha^4 + \beta^4) + \frac{1}{3}(\alpha^3 + \beta^3) + \frac{3a^2}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

となる.

α, β は①の解なので, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 1, \quad \alpha\beta = -3a^2$$

が成り立ち,

$$S_1 + S_2 = \frac{9}{2}a^4 + \frac{3}{2}a^2 + \frac{1}{12}$$

まで計算できる. これが $\frac{73}{12}$ に等しいことから, $a = 1$ を得る.

問 6 $a > 0$ を定数として, 2 曲線

$$C_1: y = x^3 + ax^2 - 2ax + a, \quad C_2: y = -x^3 + 4x^2 - 2x$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(1) C_1, C_2 の共有点の x 座標を求めよ.

(2) C_1, C_2 で囲まれる部分が存在すれば, その部分の面積を求めよ.

意図 定積分による面積計算では,

- 積分区間
- 2 曲線の位置 (上下) 関係

の把握が大切である. そこで, 文字定数を入れて場合分けが必要な設問にしてみた.

(1) は y を消去して出来る方程式

$$2x^3 + (a - 4)x^2 - 2(a - 1)x + a = 0$$

を解くことになるが, ここは数学 I で習う「次数の低い文字で整理」の復習も兼ねており,

$$(x^2 - 2x + 1)a + (2x^3 - 4x^2 + 2x) = 0$$

と捉えれば, 因数分解は容易である (実は, $x = 1$ を解にもつのだが...).

(2) は, (1) で共有点の x 座標が $1, -\frac{a}{2}$ と分かっているから, この 2 数の大小比較で場合分けが 3 通り発生する.

C_1, C_2 を表す式をそれぞれ $y = f(x), y = g(x)$ とおくと,

$$f(x) - g(x) = (x - 1)^2(2x + a)$$

となる.

$-\frac{a}{2} < 1$ つまり $a > -2$ のとき, $-\frac{a}{2} \leq x \leq 1$ において

$$2x + a \geq 0 \text{ より } f(x) - g(x) \geq 0$$

となるので,

$$S = \int_{-\frac{a}{2}}^1 (x-1)^2(2x+a)dx = \dots = \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2} + 1 \right)^4$$

となる. $a < -2$ のときも同様に処理できる.

問7 a を 1 より大きい整数とし,

$$f(x) = (a+2)x^3 + (a+1)x^2 + ax + (a-1)$$

を考える.

(1) $f'(x)$ を求めよ.

(2) $f(x)$ は極値をもたないことを証明せよ.

(3) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸, 直線 $x = 1, x = 3$ で囲まれる部分の面積 S を求めよ.

(4) 方程式 $f(x) = 0$ の整数解が存在すればそれを求めよ.

意図 「掛谷の定理」の紹介が目的であった.

掛谷の定理

n 次方程式

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

において,

$$a_n > a_{n-1} > \dots > a_1 > a_0 > 0$$

が成り立つならば, すべての解 x について $|x| < 1$ が成り立つ.

本問の $f(x)$ については,

$$a+2 > a+1 > a > a-1 > 0$$

だから, 掛谷の定理の仮定を満たす. したがって, 整数解をもつとすれば $x = 0$ しかあり得ないことが分かる.

原案では (3) が無かったが, 問題検討会を受けて (3) を追加している.

• (2) で $f(x)$ が単調増加であることが分かる

• (3) で $y = f(x)$ のグラフの $1 \leq x \leq 3$ における x 軸との位置関係の把握のために, $f(1)$ の符号を確認 ($f(1) > 0$)

この流れから, 「 $x < 1$ である整数 x に着目」というのが, こちらが意図した誘導であった.

$$f(-1) = -2 < 0, f(0) = a - 1 > 0$$

より, $f(x) = 0$ は整数解をもたない.

ただ, 後から (3) を追加したために, (3) において「 x 軸」を入れ忘れる致命的なミスをしてしまった (全員に加点). 10 年間の出題で唯一のちょんぼ! である...

文系の微積分は出題機会が多かったので, 次のような問題も出題した (問題・意図のみ紹介).

問8 関数 $f(x) = -x^2 + 2x + 8, g(x) = x^2 + x - 2$ に対し, 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

で定める. 次の問いに答えよ.

(1) $y = h(x)$ のグラフをかけ.

(2) $y = h(x)$ のグラフと x 軸とで囲まれた部分の面積 S を求めよ.

意図 「 $h(x)$ は $f(x)$ と $g(x)$ の小さい方を表す関数である」ことの紹介. また, 面積計算を確実にできるかどうか (「1/6 公式」を上手に使う手もある).

問9 次の問いに答えよ.

(1) 曲線 $y = -x^2$ に点 $(-2, 5)$ から引いた接線の方程式を求めよ. また, 接点の座標も求めよ.

(2) 「曲線 $y = |x^2 - 1| - 1$ 」と「(1) で求めた接線のうち, 傾きが負なもの」とで囲まれる部分の面積を求めよ.

意図 「外から引いた接線」「絶対値を含む関数の積分」の定番メニュー. (2) の $y = |x^2 - 1| - 1$ の $-1 \leq x \leq 1$ の部分は $y = -x^2$ であり, (1) の結果がしっかり使えるように設定を工夫した.

続けて、理系の微積分である。

問 10 a を定数とし、方程式

$$e^{2x} - a \cdot e^x + 3a - 8 = 0$$

を考える (e は自然対数の底)

(1) $x = \log 3$ は、この方程式の解でないことを示せ。

(2) この方程式の異なる実数解の個数を調べよ。

意図 定数分離をし、グラフを利用して視覚的に実数解を捉えることが出来るかどうか。

(1) は (2) で $e^x - 3$ で割って良いことを保証するための設問である。なお、 e^{2x}, e^x で $x = \log 3$ を代入した値が計算できない生徒が一定数いることを予想し、それに警鐘を鳴らす目的もあった。

(2) については、

$$a = \frac{e^{2x} - 8}{e^x - 3}$$

と定数分離できるので、右辺 $= f(x)$ としてグラフを描くことが出来れば解決する。その際、

$$x \rightarrow \pm\infty \text{ と } x \rightarrow (\log 3) \pm 0$$

をきちんと調べないとミスをする。

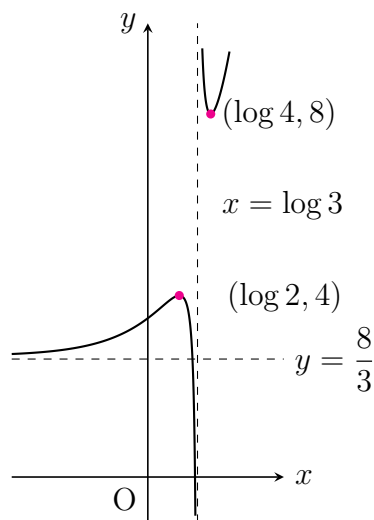


図 3: $f(x) = \frac{e^{2x} - 8}{e^x - 3}$ のグラフ

答案では、「 $e^x = t$ 」において

- 定数分離後に「 t についての分数関数」として処理

- 定数分離をせずに「 t についての 2 次方程式」とみて、「解の配置の問題」として処理

するものが見られたが、 $t > 0$ であることを見落とすミスが多かった。

本問は、演習で扱った次の問題に着想を得て考えたものである。

九州大学 2020 年度入試

点 $(a, 0)$ を通り、曲線 $y = e^{-x} - e^{-2x}$ に接する直線が存在するような定数 a の値の範囲を求めよ。

接線の方程式を求め、点 $(a, 0)$ を通る条件を利用した後、定数分離をすると次の式が現れる。

$$a = t + \frac{e^t - 1}{e^t - 2}$$

問 11 関数 $f(\theta)$ を

$$f(\theta) = \int_0^1 |\cos \theta - \sqrt{x}| dx \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

で定める。

(1) $-\pi \leq \theta \leq -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$ のとき、 $f(\theta)$ を求めよ。

(2) $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ のとき、 $f(\theta)$ を求めよ。

(3) $f(\theta)$ の最大値と最小値、および、そのときの θ の値を求めよ。

意図 授業の微積分演習で類題を扱っていたので、その定着度をみるのが目的だった。

東北大学 2012 年度入試

$0 \leq x \leq \pi$ に対して、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos |t - x|}{1 + \sin |t - x|} dt$$

と定める。 $f(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

東北大学 2016 年度入試

関数 $f(x) = \int_0^{\pi} |\sin(t - x) - \sin 2t| dt$ の区間 $0 \leq x \leq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。

- 絶対値を含む関数の積分
- パラメータを含む関数の積分

ということで、生徒にとっては苦手とする要素が詰まっている。

(1) では、指定された範囲において $\cos \theta \leq 0$ となることがポイントであり、

$$|\cos \theta - \sqrt{x}| = \sqrt{x} - \cos \theta$$

となるので、積分計算に着手できる。

(2) では、指定された範囲において $\cos \theta \geq 0$ であり、 $\sqrt{x}$ との大小比較が必要となる。

$$\cos \theta \geq \sqrt{x} \text{ となるのは, } \cos^2 \theta \geq x$$

$$\cos \theta \leq \sqrt{x} \text{ となるのは, } \cos^2 \theta \leq x$$

と分かるので、

$$f(\theta) = \int_0^{\cos^2 \theta} (\cos \theta - \sqrt{x}) dx + \int_{\cos^2 \theta}^1 (\sqrt{x} - \cos \theta) dx$$

として計算が進められる。

本問は、[6] にある次の問題を改題したものである。

東京農工大学 1979 年度入試

$$f(\theta) = \int_0^1 |\sin \theta - \sqrt{x}| dx \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) $f(\theta)$ を求めよ。
- (2) $f(\theta)$ を最小にする θ を求めよ。
- (3) (2) で求めた θ の値を α とするとき、 $\int_0^\alpha f(\theta) d\theta$ の値を求めよ。

問 12 $(5+i)^4(239+i)^{-1}$ の偏角 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲で答えよ。

意図 「マチンの公式」の紹介が目的であった。

マチンの公式

$$\frac{\pi}{4} = 4 \tan^{-1} \frac{1}{5} - \tan^{-1} \frac{1}{239}$$

計算を落ち着いて実行すれば偏角は求まるが、時間制限のあるテストでは、どうしても計算ミスをしやすい。答案では、

$$(239+i)(239-i) = 240$$

としてしまうミスが散見された。

$$(5+i)^4 = (24+10i)^2 = 476+480i$$

であり、愚直に計算を実行することで

$$\begin{aligned} (5+i)^4(239+i)^{-1} &= \frac{476+480i}{239+i} \\ &= \frac{(476+480i)(239-i)}{(239+i)(239-i)} \\ &= \frac{114244+114244i}{57122} \\ &= 2+2i \\ &= 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

より、 $\theta = \frac{\pi}{4}$ となる。

工夫した解答例としては、

$$\arg(5+i) = \alpha, \arg(239+i) = \beta$$

とにおいて、加法定理を繰り返し用いて

$$\tan \theta = \tan(4\alpha - \beta)$$

を計算するものがあつた。

$$\tan \alpha = \frac{1}{5}, \tan \beta = \frac{1}{239}$$

であり、

$$\begin{aligned} \tan 2\alpha &= \frac{2 \cdot \frac{1}{5}}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{5}{12} \\ \tan 4\alpha &= \frac{2 \cdot \frac{5}{12}}{1 - \left(\frac{5}{12}\right)^2} = \frac{120}{119} \end{aligned}$$

を求めた上で、

$$\begin{aligned}\tan(4\alpha - \beta) &= \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \cdot \frac{1}{239}} \\ &= \frac{120 \cdot 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} \\ &= \frac{119 \cdot 239 + 239 - 119}{119 \cdot 239 + 120} = 1\end{aligned}$$

が得られる. ここで, α, β について,

$$0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{6} \text{ より, } 0 < 4\alpha - \beta < \pi$$

が分かるので, $\theta = \frac{\pi}{4}$ となる.

マチンの公式を偏角を用いて表現すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= 4 \arg(5 + i) - \arg(239 + i) \\ &= \arg((5 + i)^4(239 + i)^{-1})\end{aligned}$$

であり, この解答をした生徒は, 意図せず「マチンの公式」の証明にたどり着いていたことになる.

3 終わりに

解析分野については、「(文系の) 微積分」の担当頻度が圧倒的に高く, くじ引きでは, 「また微積分か・・・」と思うことも多かった.

「指数・対数関数や三角関数で, もう少し作問したかったなあ」という想いは, 今でもある (筆者の「くじ運の無さ」に起因していますが・・・).

ネタ切れに苦しみながら, 何とか生徒に取り組ませる価値のある問題を出題しようと試行錯誤を続けていたが, その際には

- テストや授業での苦手分野の分析
- 興味を持って欲しいこと

をベースに作問を行った.

本シリーズは, 次回の「確率・その他」編で一区切りつけようと考えている. 次回もお付き合いください.

参考文献等

- [1] 長尾良平「実力テストで One more thing」第 130 回数学教育実践研究会レポート
- [2] 長尾良平「実力テストで One more thing 2」第 132 回数学教育実践研究会レポート
- [3] 「全国大学入試問題正解 数学 (国公立大編)」旺文社
- [4] 「全国大学数学入試問題詳解」聖文新社
- [5] 笹部貞市郎編「初等数学定理公式証明辞典」聖文社
- [6] 矢野健太郎著「解法の手引き 微分・積分」科学新興社
- [7] 野村隆昭著「複素関数論講義」共立出版