第130回数学教育実践研究会　レポート発表

実力テストでOne more thing

北海道室蘭栄高等学校教諭　長尾良平

令和6年8月24日　Online 数実研

1　はじめに

この3月まで勤務していた札幌南高校では, 進路指導の重要なデータとして校内実力テストの結果を利用しており,

- 1・2年生では年3回
- 3年生では年2回

テストを実施している.

長年に渡る生徒の「模擬試験並びに実力テストのデータ」と「合否結果」の蓄積によって, **効果的な進路指導**を行ってきた.

数学科では, くじ引きで担当分野を決めた後, 持ち寄り日までに各自が問題案を用意することになる. 筆者の場合は, 出題に当たって

- 生徒の弱点・急所を注意喚起したい
- 発展的な話題に繋げたい

ということを念頭において作問している.

入試問題の丸写しは極力避け, 何とかオリジナル色を・・・ということでやってきたが, 無意識の内にどこかで見たことのある問題がベースになっていることもある. また, 数実研のレポート発表や, メーリングリスト IZUMI での議論を参考にして作問したものもある.

本稿では, 筆者が昨年度までの10年間で作問したものの中から, 代数分野に属すると考えられる問題について, 出題意図を交えながら幾つか紹介してみたい.

2　実際の問題から

代数分野は, （係数等の調整によって）比較的難易度の調整がしやすい分野だと思う. ただ, 序盤での計算ミス等が原因で, 思ったように得点が伸びないこともしばしばあった.

- 式の計算
- 不等式
- 方程式
- 整数問題

の順に紹介していきたい.

問題1　次の問いに答えよ.

(1) $n<\sqrt{34}<n+1$ を満たす自然数 n を求めよ.

(2) $\sqrt{34}-\sqrt{11}$ の整数部分を a, 小数部分を b とする. a,b の値を求めよ.

(3) (2) で求めた a,b に対し, a^2+2b-4 の値を求めよ.

$\boxed{\text{意図}}$　$\sqrt{34}-\sqrt{11}$ の整数部分を求めるための「評価」が主題である.

$5<\sqrt{34}<6$ と $3<\sqrt{11}<4$ からでは,

$$1<\sqrt{34}-\sqrt{11}<3$$

となり, うまくいかない.

$5.5<\sqrt{34}<6$ と $3<\sqrt{11}<3.5$ とすれば,

$$2<\sqrt{34}-\sqrt{11}<3$$

となり成功である.

問 2　比例式

$$\frac{b+2c}{a}=\frac{c+2a}{b}=\frac{a+2b}{c}$$

を考える. 次の問いに答えよ.

(1) a, b, c を実数の範囲で考えるとき, この比例式の値を求めよ.

(2) a, b, c を複素数の範囲で考えるとき, この比例式の値を求めよ.

意図　本問については, 以前にメーリングリスト IZUMI でのやり取り [1] を拙文 [2] で紹介している. 「条件式から導かれる式の値は1つとは限らない」例を提示する目的で作問した.

「$=k$」とおいて式変形を進めると,

$$k=3,\ a+b+c=0$$

となる.

$k=3$ の場合は, a, b, c の値が存在し, $k=3$ を本当に取り得ることが分かる.

一方, $a+b+c=0$ からは,

- $a, b, c \in \mathbb{R}$ の場合は, a, b, c の値が存在せず k の値は求まらない.
- $a, b, c \in \mathbb{C}$ の場合は, a, b, c の値が存在し
$$k=\frac{-3\pm\sqrt{3}i}{2}$$
と 2 つの値を取り得る.

ことが分かる.

問 3　a を定数とする. 次の x についての連立不等式を解け.

$$\begin{cases} x^2-(a+1)x+a>0 \cdots ① \\ |x-1|<a \cdots ② \end{cases}$$

意図　文字係数の不等式である.

- ① の不等式については, 「a と 1 の大小で場合分け」ができるか
- ② の不等式については, 「$a \leqq 0$ の場合も含めて記述」できるか
☜ 意地悪な問いではありますが・・・

を試している.

問 4　次の問いに答えよ.

(1) 次の連立不等式を解け.

$$\begin{cases} \dfrac{5}{3}x-1 \leqq x+3 \cdots ① \\ \dfrac{2x+1}{3}<\dfrac{x+2}{2} \cdots ② \\ 2(2-x) \leqq 3(x+3) \cdots ③ \end{cases}$$

(2) a を実数の定数とするとき, 不等式

$$|x-2|<a$$

を解け.

(3) 「(1) の不等式の解」と「(2) の不等式の解」の共通部分に属する整数の個数が, ちょうど 4 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ.

意図　(2) の不等式については, 問 3 の ② の不等式と同じねらいである.

(3) については, (2) の不等式の解が「2 を中心に左右対称になっている（$2-a<x<2+a$）」ことを有効活用できるかどうか試している.

問 5　x についての方程式

$$x^2-(2m+1)x-3m=0$$

が実数解をもち, 2 解の絶対値の差が 5 に等しいとき, 定数 m の値を求めよ.

意図　「解と係数の関係」を利用するが, 「差の絶対値」でなく「絶対値の差」であることに注意したい（その勘違いが一定数存在した）.

2 解を α, β とすると,

$$\begin{aligned}(|\alpha|-|\beta|)^2 &= |\alpha|^2-2|\alpha||\beta|+|\beta|^2 \\ &= \alpha^2-2|\alpha\beta|+\beta^2 \\ &= (\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-2|\alpha\beta|\end{aligned}$$

であり, これに

$$\alpha+\beta=2m+1,\ \alpha\beta=-3m$$

を代入して処理を進める.

$|\alpha\beta|=|-3m|$ なので, m の正負による場合分けも考えることになる.

問 6　a を 0 でない実数の定数とする．2 次方程式 $ax^2 - ax + (a+1) = 0$ は, 次の 2 つの条件を満たしている．

(i) 異なる 2 つの実数解をもつ．

(ii) その実数解をそれぞれ α, β とするとき,

$$|\alpha + \beta + 1| = |\alpha| + |\beta|$$

が成り立つ．

そのとき, a の値を求めよ．

意図　問 5 と本質は同じである．(ii) の両辺を 2 乗して整理すれば,

$$|\alpha\beta| = \alpha\beta + (\alpha + \beta) + \frac{1}{2}$$

となるので,

$$\alpha + \beta = 1,\ \alpha\beta = \frac{a+1}{a}$$

を代入する．

問 7　$f(x) = x^2 - 4x + 3$ とする．次の問に答えよ．なお, a は定数である．

(1) $y = f(x)$ の頂点の座標を求めよ．

(2) $y = |f(x)|$ のグラフを描け．

(3) 曲線 $y = |f(x)|$ と直線 $y = a$ との共有点の個数を調べよ．

(4) 曲線 $y = |f(x)|$ と直線 $y = ax - 2 - a$ との共有点の個数を調べよ．
なお, 直線 $y = ax - 2 - a$ は a の値とは無関係に定点 $(1, -2)$ を通る．

意図　「関数 $y = |f(x)|$ のグラフ」「グラフを用いた実数解のみえる化」「定点通過の直線」という, 頻出の題材を組合せた出題である．

直線 $\ell : y = ax - 2 - a$ が $y = |f(x)|$ のグラフ上の点 $(0, 3)$ を通るとき, 点 $(1 - \sqrt{2}, 2 + 2\sqrt{2})$ で接するとき, が場合分けの急所となる．

定数 a の変化に伴って,「直線 ℓ が定点 $(1, -2)$ を中心として回転する」イメージを持てるようにしたい．

問 8　$f(x) = 2x^2 - 2x - 5$, $g(x) = -x^2 + 4x + 1$ に対し, $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$

で定める．a を定数とするとき, 方程式 $h(x) = a$ の実数解の個数を調べよ．

意図　[3] の発表を聞いて,「最大値を絶対値を用いて表せる」ことに面白みを感じたので, 生徒にも伝えたいと思い, 作問した．

$|f(x) - g(x)|$ に着目すると,

$$f(x) - g(x) \geqq 0 \text{ のとき, } h(x) = f(x)$$
$$f(x) - g(x) \leqq 0 \text{ のとき, } h(x) = g(x)$$

だと分かる．

問 9　方程式 $x^4 + 4x^3 + 11x^2 + 12x + 12 = 0 \cdots ①$ を解くことを考える．次の問いに答えよ．

(1) ① において $x = t - 1$ を代入し, 展開・整理して $P(t) = 0$ のかたちにした．多項式 $P(t)$ を答えよ．

(2) (1) の $P(t)$ に対し, $P(t) = (t^2 + a)^2 - (bt + c)^2$ が成り立つような整数 a, b, c の値の組を全て求めよ．

(3) ① の解を全て求めよ．

意図　4 次方程式の「デカルトの解法」を意識した作問である．

高次方程式の解法の基本は因数分解であり, 公式や因数定理の利用を考えるが, 本問では因数が簡単には見つけられない．そこで,「2 次式同士の積」に変形するための誘導をつけている．

(1)(2) の内容は展開・整理・係数比較であり, 点数をとってもらうつもりだったが, 本番のテストでは計算ミスが多発した．

(2) で係数比較をすると,

$$2a - b^2 = 5 \cdots ②,\ bc = 1 \cdots ③,\ a^2 - c^2 = 8 \cdots ④$$

となる．③ で条件の「a, b, c は整数」を使うと,

$$(b, c) = (1, 1), (-1, -1)$$

に絞られる．このことに気づけると, a, b, c の決定は速い．

問 10　方程式 $x^5=1\cdots$① は相異なる 5 つの解をもつ．$x=1$ は明らかにその解の 1 つであり,「1 以外の解の 1 つ」を α とする．次の問いに答えよ．

(1) x^5-1 を因数分解することによって,
$$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha$$
の値を求めよ．

(2) $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ も ① の解であることを示せ．

(3) $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)$ の値を求めよ．

(4) $p=\alpha+\alpha^4, q=\alpha^2+\alpha^3$ とおく．$p>q$ を満たすとき, p の値を求めよ．

(5) α の虚部が正のとき, α の値を求めよ．

意図　正五角形の作図に繋がる題材であり, 複素数平面の問題とも考えられる．

(2) は α の値は未知だが, それぞれを ① に代入した上で, $\alpha^5=1$ を利用して示すことができる．

(3) は, 点数を確保するために追加した小問であり, 傍用問題集でも類題を見かける．

(4) は (1) の結果が
$$\alpha^4+\alpha^3+\alpha^2+\alpha=p+q=-1$$
と表せることに気づき, また,「解の和と積の値から 2 次方程式をつくる」問題も経験済みなので,「pq に意識が向く生徒がいれば・・・」との思いで出題した（本番のテストでは若干名存在した）．

pq の計算は,
$$\begin{aligned}pq&=(\alpha+\alpha^4)(\alpha^2+\alpha^3)\\&=\alpha^3+\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7\\&=\alpha^3+\alpha^4+\alpha+\alpha^2\\&=-1\end{aligned}$$
となる．この後, p や α を求めるのは難しくない．

問 11　次の方程式がそれぞれ整数解を持つかどうか調べよ．整数解を持つ場合はそれを求め, 持たない場合は, そのことを証明せよ．

(1) $45x-18y=7$

(2) $x^2-4y=3$

(3) $x^2+y^2=2014$

意図　本問は全て「解なし」であり, その根拠の説明に力点をおいた出題である．

(1) の左辺は「9 の倍数」だが右辺は 7 なので, 等号は成立しない．

(2) は $x^2=4y+3$ と変形できるが,「整数の 2 乗を 4 で割った余りは 3 にならない」ことから等号が成立しないことが示せる．

そのことは,「x を 4 で割った余り」で場合分けして示せるが,「x の偶奇」で場合分けでも示せる．

(3) は「2014 が 4 の倍数でない偶数」であることから,「x, y の組合せがともに奇数」に限られることがまず分かる．

そのとき $m, n\in\mathbb{Z}$ として,
$$x=2m-1,\ y=2n-1$$
とおき, 元の方程式に代入・整理すると,
$$m(m-1)+n(n-1)=503$$
となり, 両辺の偶奇が一致しないので等号は成立しない．

問 12　方程式 $x^2+y^2=2020\cdots$① の自然数解を求めたい．次の問いに答えよ．

(1) 奇数と偶数の和は, 奇数となることを証明せよ．

(2) x, y がともに奇数の場合, ① の解になり得ないことを証明せよ．

(3) ① の自然数解を全て求めよ．

意図　こちらは, 自然数解をもつ場合について誘導に従いながら絞り込んでいく過程を出題した．

(1)(2) より, x, y については, $m, n\in\mathbb{Z}$ として
$$x=2m,\ y=2n$$
と表される場合に限定され, ① に代入・整理すると
$$m^2+n^2=505$$
となる．

また, $m\geqq n$ を仮定したり, $n^2\geqq 0$ を勘案したりすると,
$$\frac{505}{2}\leqq m^2\leqq 505$$
となり, $16\leqq m\leqq 22$ に絞り込まれる．

問 13　数列 $\{a_k\}$ の一般項 a_k を $a_k = \left[\sqrt{k}\right]$ で定める．次の問いに答えよ．なお, $[x]$ は実数 x の整数部分（x を超えない最大の整数）を表すものとする．

(1) $a_{10}, a_{100}, a_{1000}$ をそれぞれ求めよ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の各項を

「$b_n : a_k = n$ となる k の個数」

のように定めるとき, b_1, b_2, b_3, b_{10} を求めよ．

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}\left[\frac{b_k+79}{k^2}\right]$ を求めよ．

$\boxed{\text{意図}}$　[4] でも紹介したものだが, ねらいは次の 2 つである．

- 「文章で定義された数列の一般項」を求められるかどうか．
- 「オーダーの感覚」があるかどうか．
  ☜ $b_k = 2k+1$ なので, $\left[\dfrac{b_k+79}{k^2}\right]$ は k がある程度大きくなると 0 になる．
  ☜ 2016 年度の北大文系の整数問題が出題の契機に．

北海道大　2016 年度入試

> x を自然数とする．$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数となるような x をすべて求めよ．

問 14　次の問いに答えよ．

(1) $80001_{(9)} - 23765_{(9)}$ の値を九進法で答えよ．

(2) $1011000_{(2)} \div 32_{(10)}$ の値を二進法で答えよ．

(3) n を 4 以上 9 以下の自然数とする．そのとき, $2302.3_{(n)} \times 11_{(n)}$ の値を n 進法で答えよ．

$\boxed{\text{意図}}$　(1) は [5] を参考に,「繰り下がりのある引き算」をどう処理するかを題材にした．

$$78888_{(9)} - 23763_{(9)}$$

とするのが上手い．

(2) は「$32 = 2^5$」なので, $1011000_{(2)}$ を $32_{(10)}$ で割るのは,「小数点を 5 つ左に動かす」ことに対応することに気がついて欲しかった．

(3) は次の入試問題を参考に作問した．

徳島大　2017 年度入試

> n を 4 以上の整数とする．
>
> $$(n+1)(3n^{-1}+2)(n^2-n+1)$$
>
> と表される数を n 進法の小数で表せ．

徳島大の問題では, 計算結果が

$$2n^3+3n^2+2+3n^{-1}$$

であり, $n \geqq 4$ より $2302.3_{(n)}$ となる．

この問題を演習で扱った際に,「(係数に 2,3 があるから適切ではないが) $n = 2, 3$ だったら繰り上がりが生じるなぁ〜」と思った．

そこで, 係数と n を見比べながら,「必要に応じて繰り上がりの処理を実行する」設問にした．

$$2302.3_{(n)} \times 11_{(n)} = 2n^4+5n^3+3n^2+2n+5+\frac{3}{n}$$

となり, $n=4,\ n=5,\ 6 \leqq n \leqq 9$ の場合分けが必要となる．

問 15　多項式 $f(x) = x^4-6x^3+15x^2-18x+10$ を考える．

(1) $f(x) = (x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ を満たす整数 a, b, c, d を求めよ．ただし, $b < d$ であり, b と d は正の数とする．

(2) $n \geqq k$ を満たす任意の自然数 n に対して, $f(n)$ が素数とならないような最小の自然数 k を求めよ．

$\boxed{\text{意図}}$　[6] でも扱われている, 宮崎大学の入試問題を参考に作問したものである．

宮崎大　2004 年度入試

> n を 2 以上の自然数とするとき, n^4+4 は素数でないことを示せ．

(1) で $a=-2,\ b=2,\ c=-4,\ d=5$ と求まるので,

$$f(n) = (n^2-2n+2)(n^2-4n+5)$$

となる. n に具体的な数値を入れて計算すると,

$$f(1)=2,\ f(2)=2,\ f(3)=10,\ f(4)=50,\ \ldots$$

となるので, $k=3$ と答えたくなるが, $n \geqq 3$ に対して必ず $f(n)$ が合成数となることは示せていない.

$$\begin{aligned} f(n) &= (n^2-2n+2)(n^2-4n+5) \\ &= \{(n-1)^2+1\}\{(n-2)^2+1\} \end{aligned}$$

であり, $n \geqq 3$ であれば

$$(n-1)^2+1 \geqq 5,\ (n-2)^2+1 \geqq 2$$

がともに成り立つので, $f(n)$ は合成数であることが分かる.

「$n \geqq 3$ のとき素数でないことを示せ」ではなく, 「$n \geqq k$ のとき $f(n)$ が素数でないような最小の k」を問うことで, 難易度を少し上げている.

3　終わりに

くじ引きで担当分野が決定後, 持ち寄り日までの 2〜3 週間, 暇な時間を見つけては「良い問題」を求めて試行錯誤していた. 持ち寄り日には, **「他の先生がどんな問題を用意してくるか」**とても楽しみにしていた.

答案返却日には「講評」もセットで配布するが, そこには

- 作問・出題の意図
- 多かったミス
- 別解

を載せている. 生徒の心に何か刺さるものがあれば・・・との思いからである.

実力テストは, 「生徒の進路実現のため」というのが第一義であるが, **「教員の授業力・作問力向上のため」というのが実は「裏の第一義」なのではないか**と, 密かに思っている. 教員の実力が向上すれば, 生徒の進路実現に少なからず繋がるからである. つまり,

「(教員の) 実力 (が問われる) テスト」

である.

本稿を執筆しながら, 持ち寄り日に **「この問題面白いねぇ！」**と言ってもらえることを目指して作問していたことを思い出した.

参考文献等

[1] 「どこまで記述するのか」
数実研メーリングリスト IZUMI

[2] 長尾良平「教員の疑問で One more thing」
第 121 回数学教育実践研究会レポート

[3] 安田富久一「難しい問題に仕上げる」
第 71 回数学教育実践研究会レポート

[4] 長尾良平「数列の導入で One more thing」
第 123 回数学教育実践研究会レポート

[5] 坪田耕三著「プレミアム講座ライブ 坪田耕三の算数授業のつくり方」教育図書出版会

[6] 「改訂版 4STEP Ⅰ + A」数研出版

[7] 「全国大学入試問題正解 数学（国公立大編）」
旺文社

[8] 「全国大学数学入試問題詳解」聖文新社