第128回数学教育実践研究会　レポート発表

生徒の疑問でOne more thing 3

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和6年1月27日　オンライン数実研

1　はじめに

生徒の疑問から展開するシリーズの3回目. 今回は, 数学Ⅲの「関数」・「微分・積分」に関わる疑問を3つ紹介したい.

2　合成関数と逆関数

傍用問題集に次のような問題があった.

問1　関数 $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x+1}$ と $g(x)=\dfrac{ax+1}{bx+c}$ の合成関数 $(f\circ g)(x)$ は, その定義域において

$$(f\circ g)(x)=x$$

を満たしている.

このとき, 定数 a, b, c の値を求めよ.

問題集の欄外には,「$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数である」というヒントが載っていたが, 同僚は**「$g(x)$ は $f(x)$ の逆関数って言い切れるんですか？」**と受け持ちの生徒から質問されたとのこと.

大学で習ったことを思い出すと, $(f\circ g)(x)=x$ のとき

(1) f は全射

(2) g は単射

である. 簡単に確認しておこう.

$$f: B\to A, g: A\to B$$

とする.

(1) は A の元 a を選ぶごとに, $f(b)=a$ となるような B の元 b が存在することを示せばよい.

a に対して $b=g(a)$ ととれば,

$$f(b)=f(g(a))=a$$

が成り立つので, f は全射である.

(2) は A の元 a_1, a_2 に対し, $g(a_1)=g(a_2)$ ならば $a_1=a_2$ であることを示せばよい.

$g(a_1)=g(a_2)$ であれば,

$$a_1=f(g(a_1))=f(g(a_2))=a_2$$

が成り立つので, g は単射である.

そこで, 次のような関数 f, g を考えてみる.

$\mathbf{R}_{x\geqq 0}=\{x\in\mathbf{R}\,|\,x\geqq 0\}$ とするとき,

$$\begin{array}{ccccccccc} f: & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}_{x\geqq 0} & \quad & g: & \mathbf{R}_{x\geqq 0} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & \Cup & & \Cup & & & \Cup & & \Cup \\ & x & \longmapsto & x^2 & & & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

という2つの関数 f, g を考えると,

- f は全射だが単射ではない
- g は単射だが全射ではない

となっている. そのとき,

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=(\sqrt{x})^2=x$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\sqrt{x^2}=|x|$$

となり, $f\circ g$ は恒等写像だが **$g\circ f$ は恒等写像ではない**.

したがって, $(f \circ g)(x) = x$ が成り立つからといって必ず $(g \circ f)(x) = x$ が成り立つとは限らず, $\boldsymbol{g = f^{-1}}$ **とは言い切れない**ことが分かる.

2 つの集合の次元を変えれば, もっと色んな例を作ることができる.

$$
f: \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ \cup\!\!\!\!\!\,\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\,\shortmid \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}
\qquad
g: \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ \cup\!\!\!\!\!\,\shortmid & & \cup\!\!\!\!\!\,\shortmid \\ x & \longmapsto & (x, x+1) \end{array}
$$

を考えると,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x, x+1) = x$$

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(x) = (x, x+1)$$

となり, $f \circ g$ は恒等写像だが $g \circ f$ は恒等写像ではない.

3　累乗根関数の表記

累乗根 $\sqrt[n]{x^m}$ について, 各種計算や微積分で扱う際には, 有理数の指数表記 $x^{\frac{m}{n}}$ を用いて公式を適用し, 最終的には**「累乗根の表記に戻して解答」**する（ことになっている）.

筆者は, 数学 II や数学 III の当該箇所において, 過去に自身が習ったように**「出題時の形に合わせて答える」**ように指導してきた. ただ, それは**「そう習ったから」**が理由であり, 数学的な理由を考えたことはなかった.

考査返却時に生徒から質問されたときも,「そう表記することになっているよ」と返答したが, **「指数表記のままでも良いよなぁ」と内心思って**いるところがあった.

また, 数学 II や数学 III の教科書や問題集を見てみると, 「〜と直すことが普通である」「〜と直すことが多い」との記述はあるが, **理由には触れていない**.

そこで, 教科書会社の担当の方にお願いして編集部宛に質問したところ, **「出題時の表記に合わせないと定義域が変わってしまう」**とのコメントをいただいた. 確かに, **関数は定義式だけでなく, 定義域とセットで考える**べきものである.

実際, $y = x^{\frac{1}{3}}$ だと定義域は「$x > 0$」だが, $y = \sqrt[3]{x}$ だと定義域は「全実数」である. 言われてみればそうなのだが, その発想は全くなかったので**「そっ, そうなんだ・・・」というのが正直な感想**である. ちなみに, 大学生向けの書籍では指数表記のままのものも見受けられる.

指導書を見てみると, 「$\sqrt[3]{x}$ が $x > 0$ のときは $x^{\frac{1}{3}}$ と直して処理ができ, $x < 0$ のときは, $x = -t$ とおいて処理すれば, $x > 0$ のときと結果は一致する」という記述を微分のところで見つけることができた（$\log|x|$ の導関数を $x > 0, x < 0$ で別々に処理し, $(\log|x|)' = \dfrac{1}{x}$ とするのと同じ）.

ちなみに, 次の積分はどうだろうか（傍用問題集からの引用である）.

$$\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$$

被積分関数の定義域を考えると,

- 分子については, $\sqrt{x}$ より $x \geqq 0$
- 分母については, $\sqrt[3]{x}$ より $x \neq 0$

だから, 全体では $x > 0$ となる.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt[3]{x}}\, dx &= \int \frac{x^{\frac{1}{2}} - 1}{x^{\frac{1}{3}}}\, dx \\
&= \int (x^{\frac{1}{6}} - x^{-\frac{1}{3}})\, dx \\
&= \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} - \frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C \\
&= \frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C
\end{aligned}
$$

が「模範解答」となるが, $x > 0$ であるから, **指数表記で止めた解答でも（定義域について）問題がない**はずである. さて, どうなんでしょう？

4　弧長の計算において

問 2　関数 $f(x) = x\sqrt{x}$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 4$ の範囲の弧長 l を求めよ.

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

であり,

$$
\begin{aligned}
l = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx &= \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 \\
&= \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1)
\end{aligned}
$$

となる.

生徒の質問は,**「$f(x)$ の定義域から $f'(x)$ を考えられるのは $0 < x < 4$ なのに, $0 \leqq x \leqq 4$ で積分してよいのか？」**というものである.

高校では, 右側微分係数 $f'_+(0)$ や左側微分係数 $f'_-(4)$ の**扱いが微妙**であり, 言われてみればもっともな疑問である.

- 増減表において, 端点での $f'(x)$ の欄は空欄にする.
- $f(x) = |x|$ が $x = 0$ で微分可能でないことは扱っている.

「片側微分係数」の概念をきちんと導入すれば, $f'(x)$ は $0 \leqq x \leqq 4$ で定義され（しかも連続であり）, 何の問題もない.

なお,「関数 $f(x) = \sqrt{x}$ のグラフの $0 \leqq x \leqq 4$ の範囲の弧長 l」に問題を改変すると, 弧長 l は存在するが, $f'_+(0)$ が存在しないので広義積分となり, 話がまたややこしくなる.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

より,

$$l = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{4} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$$

とでも書くべきか？ なお, 積分

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx$$

については,

$$\int \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dx = \int \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\, dx$$

とし, $u = 2\sqrt{x}$ と置換することで

$$\int \frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}\, dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u^2+1}\, du$$

とできる. さらに, 部分積分等を用いて

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \int \sqrt{u^2+1}\, du \\ &\quad = \frac{1}{4}\{u\sqrt{u^2+1} + \log(u + \sqrt{u^2+1})\} + C \end{aligned}$$

と原始関数を求めることができ,

$$\begin{aligned} l &= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{4}\{u\sqrt{u^2+1} + \log(u + \sqrt{u^2+1})\} \right]_{2\sqrt{\varepsilon}}^{4} \\ &= \sqrt{17} + \frac{\log(4 + \sqrt{17})}{4} \end{aligned}$$

となる.

l を求めるなら, $x = y^2$ $(0 \leqq y \leqq 2)$ とする方が気分的には楽である．このときは,

$$l = \int_0^2 \sqrt{1 + 4y^2}\, dy$$

となり, 似たような計算を行うが広義積分は考えなくてよい.

5　終わりに

本レポートでは, 生徒からの 3 つの質問を取り上げてみた．どの質問も, 細かいところを突いてきている.

「合成関数と逆関数」については, 基本的な概念の筆者自身のよい復習になった.

「累乗根関数の表記」「弧長の計算」に関しては, 筆者が気にも留めていない事項だったので, 新たな視点を提供してもらい勉強になった．ただ,「累乗根表記の表記」については, もう少し考えたいと思っている.

筆者自身の知識のブラッシュアップのためにも, このような生徒とのやり取りを今後も大事にしたい. また, 疑問点を生徒と一緒に考えていくような授業の構成にしていきたい.

参考文献等

[1] 「改訂版 教科書 傍用 4STEP 数学Ⅲ」数研出版

[2] 井上正雄「積分学（朝倉数学講座 7）」朝倉書店