第126回数学教育実践研究会　レポート発表

理系の微分でOne more thing 2

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和5年8月26日　オンライン数実研

1　はじめに

以前に, [1][2] 等で理系の微分における実践を紹介してきた. 本レポートでは, それらに続くものとして, 筆者が授業をする際に付随して扱っている題材について紹介していきたい.

2　陰関数の微分

授業で陰関数の微分を用いるのは, 円や2次曲線の接線を求める場合だと思う.

陰関数の定義（概要版）

関係 $f(x,y)=0$ があり, $f(a,b)=0$ が成り立っている. 点 (a,b) の十分近くで, $f(x,y)=0$ が定める曲線が関数 $y=g(x)$ のグラフとみなせるとき, $y=g(x)$ を $f(x,y)=0$ が定める陰関数という.

例1　単位円 $x^2+y^2=1$ の場合, 陰関数 $g(x)$ として

$$g(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x^2} & (y>0)\\ -\sqrt{1-x^2} & (y<0)\end{cases}$$

のようにとることができる. なお, $(1,0), (-1,0)$ を内部に含む部分に対しては, $g(x)$ は存在しない（x に対して, y が2つ対応する）.

この円上の点 (a,b)（ここでは $b>0$ とする）での接線の傾きを求めるためには, 微分の計算が必要となる.

例1で示したように具体的に陰関数 $g(x)$ を求めた上で微分すると,

$$\begin{aligned}g'(x)&=\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(1-x^2)'\\&=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}\\&=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\end{aligned}$$

となる ($x=\pm1$ のとき, 微分係数は存在しない).

一方, 陰関数 $g(x)$ を求めずに話を進めると次のようになる. $x^2+y^2=1$ の陰関数を $y=g(x)$ とすると, $x^2+\{g(x)\}^2=1$ が成り立つ. この両辺を x で微分すると,

$$2x+2g(x)\cdot g'(x)=0$$
$$x+g(x)\cdot g'(x)=0$$

$g(x)\neq0$（これは $x\neq\pm1$）のとき,

$$\begin{aligned}g'(x)&=-\frac{x}{g(x)}\\&=-\frac{x}{y}\end{aligned}$$

教科書では $y=g(x)$ とおかず, そのままの式で微分して

$$2x+2y\cdot y'=0$$

とするが, 筆者としては $y=g(x)$ とおく方が, 最初のうちは合成関数の微分を用いていることが見やすいのではないかと考えている.

慣れてきたら,「$y=$」の形にするのが困難なものに対しても扱って, その有用性を味わっておきたい.

例 2　曲線 $x^3 + xy^5 - 2y^2 = 0$ 上の点 $(1,1)$ における接線の方程式.

与えられた曲線の式を具体的に「$y =$」にできる気がしないので, 陰関数の微分を用いると,

$$3x^2 + y^5 + x \cdot 5y^4 \cdot y' - 2 \cdot 2y \cdot y' = 0$$
$$(5x \cdot y^4 - 4y)y' = -3x^2 - y^5$$
$$5x \cdot y^4 - 4y \neq 0 \text{ のとき } y' = -\frac{3x^2 + y^5}{5x \cdot y^4 - 4y}$$

$x = 1, y = 1$ のとき, $y' = -4$ となるので, 求める接線の方程式は

$y = -4(x-1) + 1$ つまり, $y = -4x + 5$ となる.

授業では, 曲線 $x^3 + xy^5 - 2y^2 = 0$ と点 $(1,1)$ での接線を Grapes で描画したものを見せている. 生徒は曲線の形状が想像しづらいため, その形状と直線 $y = -4x + 5$ が実際に接線になっていることに興味を持った様子だった.

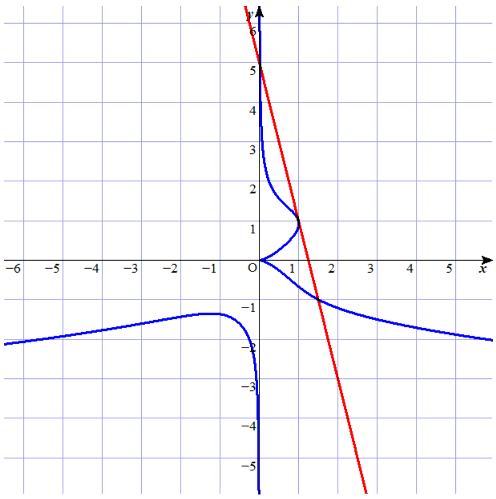


図 1: 確かに接しています・・・

なお, 陰関数は implicit function の和訳であるが, 本によっては**陰伏関数**と記述されている. **「音も似せようとした」先人の言語センス**を紹介している. derived function ：導（来）関数も同様である.

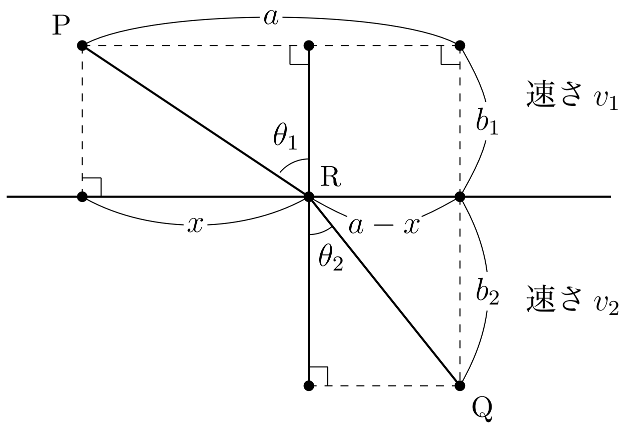
また,「陰関数の微分」「逆関数の微分」の**「具体的な関数の式は明示できなくても, 微分係数は求められる」**という面白さを感じ取って欲しいと思っている.

3　二次導関数

筆者の授業においては,「$f(x)$ のことは $f'(x)$ に, $f'(x)$ のことは $f''(x)$ に聞け！」と言っている（「無闇やたらと微分せよ！」という趣旨では勿論ない）.

二次導関数の活用例として, スネルの法則（屈折の法則）を扱うようにしている.

例 3　次の図において, $\dfrac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \dfrac{v_1}{v_2}$ が成り立つことを示せ.



「光は距離が最短になる経路を通る」という**「フェルマーの原理」**を用いて示す.

PR の所要時間を t_1, RQ の所要時間を t_2 とすると, 次のように表せる.

$$t_1 = \frac{\mathrm{PR}}{v_1} = \frac{\sqrt{x^2 + b_1^2}}{v_1}$$
$$t_2 = \frac{\mathrm{RQ}}{v_2} = \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b_2^2}}{v_2}$$

よって, PQ の所要時間を $t = f(x)$ とすると,

$$\begin{aligned} f(x) &= t_1 + t_2 \\ &= \frac{\sqrt{x^2 + b_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b_2^2}}{v_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2x}{v_1 \cdot 2\sqrt{x^2 + b_1^2}} + \frac{2(a-x) \cdot (-1)}{v_2 \cdot 2\sqrt{(a-x)^2 + b_2^2}} \\ &= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + b_1^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + b_2^2}} \\ &= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{\mathrm{PH_1}}{\mathrm{PR}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{\mathrm{QH_2}}{\mathrm{RQ}} \\ &= \frac{1}{v_1} \cdot \sin\theta_1 - \frac{1}{v_2} \cdot \sin\theta_2 \end{aligned}$$

ここで, $f'(x)=0$ とおくと,

$$\frac{1}{v_1}\cdot\sin\theta_1=\frac{1}{v_2}\cdot\sin\theta_2 \text{ より } \frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

この条件を満たすときの x を x_0 とおくことにすると, t は $x=x_0$ で極値をとるように思われるが, **極小なのかどうかは $f'(x)$ の符号変化**を調べないと分からない.

そこで, 生徒には「このままだと極値をとる可能性で終わってしまうよね？」と投げかける. 生徒からは,「さらに微分するんですか・・・」という反応があったので,「やれば何か分かるんじゃない！」とけしかけて, やりたくなさそうな彼らの背中を押す.

$$f''(x)=\frac{b_1^2}{v_1}\cdot(x^2+b_1^2)^{\frac{3}{2}}+\frac{b_2^2}{v_2}\cdot\{(a-x)^2+b_2^2\}^{\frac{3}{2}}>0$$

より, $t=f(x)$ は $x=x_0$ で極小値をとることが確定する.

この計算は, 使う頻度が高いが間違いやすい

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

の良い練習になると思う.

なお, 今回は $f''(x)$ の符号を調べることによって証明をしたが, それをやらずに証明できないか考えさせることも, 時間があればやらせてみたい.

4　おまけ：ナブラ演算子ゲーム

以前, 生徒にある関数の極限を質問された.「問題集に載ってた問題なの？」と尋ねると, **「ナブラ演算子ゲーム」**というカードゲームで出くわしたものらしい. 詳細は Web ページを参照していただきたいが, 概略としては

- 場には $1, x, x^2$ のカードが置かれている.
  ☜ 基底と呼ぶ

- 関数や演算のカードを配布

- 基底を変化させる
  ☜ 関数の乗除によって
  ☜ 演算を作用させて
  $\nabla, \Delta, \dfrac{d}{dx}, \displaystyle\int, \lim_{x\to+\infty}, \lim_{x\to 0}, f^{-1}$ など

- 基底を全て消した方が勝利
  ☜ 基底が消えるのは・・・
  ・演算によって値が 0 になった
  ・演算によって発散した
  ・演算によって他の基底と線形従属

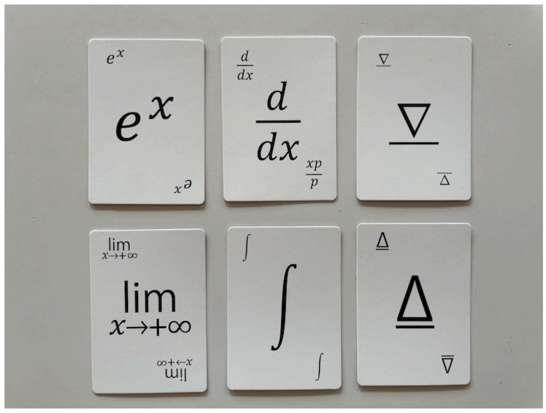


図 2: カードの一部です

本ゲームを紹介している Web ページやパッケージの裏には,

> 「∇」という記号をご存じでしょうか？
>
> 「∇」は、ナブラ演算子といい, 数学, 物理, 化学などで使う微分演算子です. このように聞くと, 難しく感じられる方も多いかも知れませんが, この演算子を気楽に楽しめるゲームがあるとしたらどうでしょう.
>
> それが「ナブラ演算子ゲーム」です. ルールはいたってシンプル. 基底を微分して相手を 0 次元にするだけです.
>
> 一度遊び方を覚えれば, いつでもこの刺激的なゲームをプレイすることができます.
>
> 是非とも「ナブラ演算子ゲーム」の世界に足を踏み入れてみて下さい。.

とあります. 興味を持たれた方は, ぜひ刺激的なゲームを体験されてみてはどうでしょうか (笑) .

5　終わりに

今回扱った題材は,（どちらかというと）あまり深入りしない内容に関係すると思う. しかし,

少し深入りすることで, その概念（定理）の重要性や威力を感じ取ることができる題材だと思う.

また, 次に数学Ⅲを担当した際には, 高次導関数の題材として, 関数 $f(x)$ の**シュワルツ導関数**

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

を取り上げるのも, 面白いかと思っている. 生徒に刺激を与えていけるよう, 教材の研究は欠かせないと考えている.

最後に取り上げた「ナブラ演算子ゲーム」はオマケの内容だが, 生徒から話を振ってくれるというのは, **「先生は, こういうの好きなんだろうなぁ」**と思ってくれている証左であり, **嬉しいしありがたい**と思っている.

参考文献等

[1] 長尾良平「理系の微分で One more thing」
第 101 回数学教育実践研究会レポート

[2] 長尾良平「二次導関数で One more thing」
第 102 回数学教育実践研究会レポート

[3] 石川忠孝「陰関数の定義及び陰関数定理に関するネックの解明」
松山大学論集　第 12 巻　第 1 号

[4] スミルノフ高等数学教程 1　共立出版

[5] Nabla Game ナブラ演算子ゲーム
`https://nablagame.com/`

[6] R.L.Devaney 著　後藤憲一訳
「カオス力学系入門　第 2 版」共立出版