第125回数学教育実践研究会　レポート発表

理系の積分でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和5年6月10日　北海道大学理学部5号館

1　はじめに

理系の積分は, 置換積分や部分積分といった技法や面倒な代入計算等, 生徒にとってハードな単元の1つである. 今回は, 息切れ気味な生徒に対して, リラックス？ してもらうための小ネタ集である.

2　定積分の漸化式

部分積分の演習として, 定積分の漸化式に関する問いがある. 次に挙げる3つについては, 授業で積極的に扱うようにしている.

その1：1/6公式との繋がり

非負整数 m, n に対して,

$$B(m,n)=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m (x-\beta)^n\,dx$$

$$B(m,n)=\frac{n}{m+1}B(m+1,n-1)$$

が成り立つので, 繰り返し適用して

$$B(m,n)=\frac{m!\,n!}{(m+n)!}\,B(m+n,0)$$

となる. ここで,

$$\begin{aligned}B(m+n,0)&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^{m+n}\,dx\\&=\frac{(\beta-\alpha)^{m+n+1}}{m+n+1}\end{aligned}$$

より,

$$B(m,n)=\frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}$$

が得られる.

この積分を紹介することによって, 面積計算でよく用いられる「1/6公式」「1/12公式」を統一的に眺めることができる.

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx&=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)\,dx\\&=-B(1,1)\\&=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)^2\,dx&=\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(\beta-x)^2\,dx\\&=B(1,2)\\&=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4\end{aligned}$$

また, 大学で学ぶベータ関数

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx\quad(p>0,q>0)$$

との関連も紹介できるだろう.

その2：検算等で使えますね

非負整数 n に対して,

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$$

$$I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}\ ,\ I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$$

であり, $n \geqq 2$ のとき

$$I_n = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

となるので, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ より

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

を得る. n の偶奇によって場合分けしながら, この漸化式を繰り返し適用すると,
$n = 2m$ のとき,

$$\begin{aligned} I_{2m} &= \frac{2m-1}{2m} \cdot \frac{2m-3}{2m-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}\ I_0 \\ &= \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$n = 2m-1$ のときも同様にして,

$$\begin{aligned} I_{2m-1} &= \frac{2m-2}{2m-1} \cdot \frac{2m-4}{2m-3} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3}\ I_1 \\ &= \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} \end{aligned}$$

を得る.

授業では, **「2ずつカウントダウンするのを”!!”と書きます」**と言うと, 「冗談みたい」と教室がざわざわする（笑）.

その3：広義積分も・・・

> $x > 0$ に対して,
>
> $$\Gamma(x) = \int_0^\infty s^{x-1} e^{-s}\, ds = \lim_{t\to\infty} \int_0^t s^{x-1} e^{-s}\, ds$$

$$\int_0^t s^{x-1} e^{-s}\, ds = -\frac{t^{x-1}}{e^t} + (x-1) \cdot \int_0^t s^{x-2} \cdot e^{-s}\, ds$$

より,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \lim_{t\to\infty} \int_0^t s^{x-1} e^{-s}\, ds \\ &= \lim_{t\to\infty} \left\{ -\frac{t^{x-1}}{e^t} + (x-1) \cdot \int_0^t s^{x-2} \cdot e^{-s}\, ds \right\} \\ &= (x-1) \cdot \int_0^\infty s^{x-2} \cdot e^{-s}\, ds \\ &= (x-1) \cdot \Gamma(x-1) \end{aligned}$$

特に, x が自然数の時は,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= (x-1) \cdot \Gamma(x-1) \\ &= (x-1)(x-2) \cdot \Gamma(x-2) \\ &= \ldots = (x-1)(x-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-s}\, ds = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-s}\, ds \\ &= \lim_{t\to\infty} [-e^{-s}]_0^t = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{e^t} + 1 \right) = 1 \end{aligned}$$

となるので,

$$\Gamma(x) = (x-1)(x-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = (x-1)!$$

また,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s}\, ds = \sqrt{\pi} \quad \cdots (※)$$

が成り立つので,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}$$

を得る. 一般化や拡張は

- 鈍角の三角比
- 負の整数の指数

などで生徒は体験済みであるが, **「階乗も一般化できるんですね！」**と話すと, またしても生徒はざわざわする（笑）.

なお, (※) の積分については, $s = u^2$ と置換すると,

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \int_0^\infty s^{-\frac{1}{2}} e^{-s}\, ds = \sqrt{\pi} \\ &= \int_0^\infty u^{-1} e^{-u^2} 2u\, du \\ &= 2 \int_0^\infty e^{-u^2}\, du \end{aligned}$$

となり, 「正規分布の確率密度関数」に関係する積分が現れる. 新カリでは統計が重視されており, この積分に触れる場面も出てくるので, そうなれば生徒の天下り感は少し減少するのではないだろうか.

3　偶関数・奇関数の積分

数学IIでは面積と絡めて, 数学IIIでは置換積分を利用して, 偶関数・奇関数の積分についての次の性質が説明・証明されている.

偶関数・奇関数の積分

- $f(x)$ が偶関数のとき
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$
- $f(x)$ が奇関数のとき
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

この部分の演習を終えた後, **「今なら皆が一番よく分かるよね！」** と次の画像を提示した.

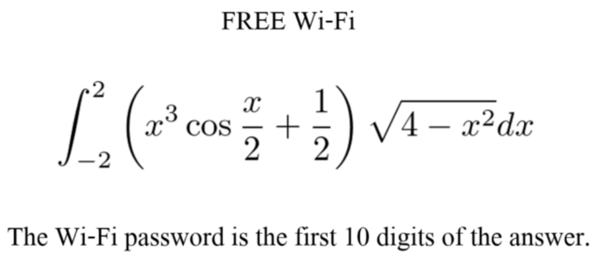

図 1: 数学ができないと接続が・・・

数年前に SNS 上で紹介されたネタである. 一見難解な積分計算に見えるが, **被積分関数と積分区間に着目**すれば, 何てことはない**円の面積に帰着される積分**であり,

$$\pi = 3.141592653$$

が正解である. ちなみに, この話をした後に（積分とは関係ないが）次のネタも取り上げている.

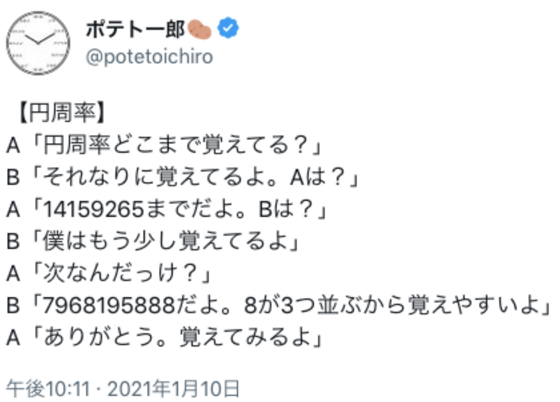

図 2: 意味が分かると怖い話

円周率を 20 桁位まで覚えている生徒もおり, **「違うんじゃないですか？」** という声も上がる.

でも, **A 君と B 君は間違ったことを言っている訳ではない.** 気になる方は, [3] のサイトで検索してみると, その意味が分かり, 怖くなること請け合いである（笑）.

4 終わりに

「生徒に興味・関心を持ってもらうためには, まずは自分から」 ということで, 例によって**情報収集に努めている**今日この頃である. 前半の内容（特に Γ 関数）については得意な生徒向け, 後半の内容については苦手な生徒も含めて全員向けの話である.

目先の点数や受験に囚われることなく, **「知的好奇心のアンテナの感度」を上げていける生徒**を育てていきたい.

参考文献等

[1] 積分して Wi-Fi をつなげよう！　マスログ
`https://wakara.co.jp/mathlog/20201225`

[2] ポテト一郎さんの Twitter
`https://twitter.com/potetoichiro`

[3] π= 3.14159 . . .
`http://www.subidiom.com/pi/`