

第124回数学教育実践研究会 レポート発表

One more thing の落ち穂拾い3

北海道札幌南高等学校教諭 長尾良平

令和5年1月28日 Online 数実研

1 はじめに

今回は第111回以来の落ち穂拾いである。日々、授業のネタを探すのに Web ページや Twitter を巡回するが、そこで見つけたものを幾つか紹介していきたい。

2 ベン図をよりファンシーに

数学 I で簡単な集合演算や論理を扱う。真理値集合を通して、2つの内容は繋がっている。Twitter を閲覧していると、ファンシーなベン図を見つけたので紹介したい。

1つ目は、香水の「DOLCE & GABBANA」をモチーフにしたものである。



図 1: こあたんさんのツイートから

2つ目は、ハロウィンの「trick or treat」をモチーフにしたものである。

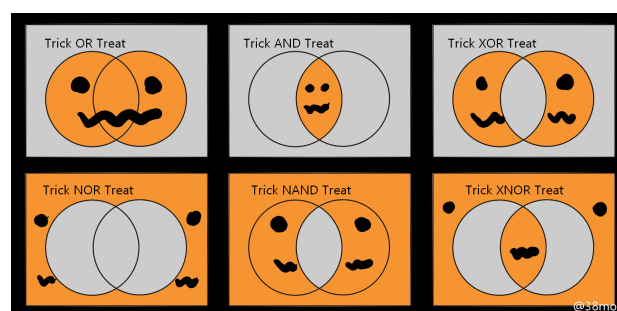


図 2: 宮本一賢さんのツイートから

ベン図そのものは5月に取り扱っていたが、両者ともハロウィンの時期にあわせて授業で紹介した。タイムリーなことや発想の面白さも相まって、生徒はクスクス笑っていた。

3 視力検査と三角関数

三角比・三角関数のネタを探していた際に、視力検査で用いられる「ランドルト環」が三角関数と関連づけられることを知った。

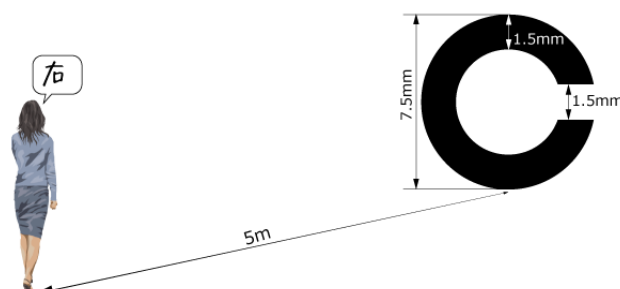


図 3: 視力 1.0 のランドルト環

視力は「確認できる最小視角の逆数」で表され、「1分 (1/60 度) の視角を確認できる能力」を「視力 1.0」と定めている。

視力検査は通常 5 メートル離れた距離から行いが、「文字の切れ目部分の幅 1.5 ミリ」がちょうど 5 メートル離れたところからの視角 1 分に相当する。

鯨坂もっちょさんは「数学デー」を開催・運営されておられるが、21 年 4 月のツイートでは、数学デーの報告 (の 1 つ) として「**千里眼の人の視力はいくつだろうか?**」というネタが紹介されていた。

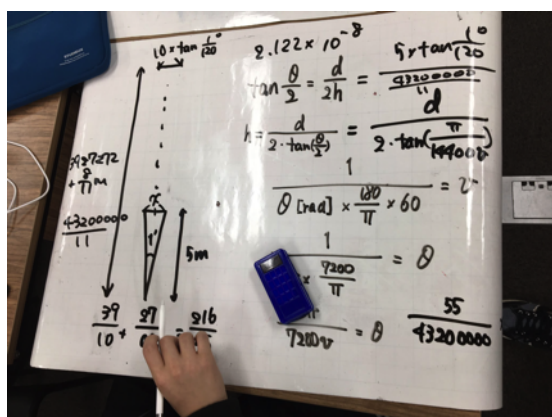


図 4: 鯨坂もっちょさんのツイートから

三角関数の単元に来たらこのネタを紹介しようと思っていたら、11 月にべけむさんの次のツイートに遭遇した (**太字**は筆者が強調)。

うちの高校、視力検査を数学教師陣が担当してたんだけど、学生は**穴の方向をラジアンで答える**ことになってて「わかりません」っていうと「**見えないのかラジアンがわからないのかどっち?**」って怒られるきもい風習があったのを唐突に思い出した。

ツイートを読み終えた瞬間、怒られている生徒の顔が頭に浮かんでしまい、吹き出してしまった。(ラジアンで答えさせられた) べけむさんは大変だっただろうなあと思いつつ、「弧度法を習慣づけよう」という数学教師陣の意図 (があったかどうか定かではないが) には感心した。

授業で 2 つのツイートを紹介したところ、「先生! 来年の検査ではラジアンで答えます!」と

の宣言が数名の生徒から聞かれた。次年度の検査では、そのことを覚えていた生徒若干名がラジアンで答えてくれた。

4 円周率の近似分数

2 年前の夏休みに差し掛かる頃、3 年生の副担任だった筆者は夏期講習の教材を作成していた。発展コース担当で、「複素数平面と整数問題をメインに据え、最終日は分野フリーで面白い問題を・・・」と考えていた。そのとき、目にしたのが次のツイートである (一部 typo があり、「大きいこと」は「小さいこと」が正しい。後日訂正のツイートもあがっていた)。



和から@大人のための数学・統計... @wakara_na... · 2020年7月22日 ...
本日7月22日は「円周率近似値の日」です。
ヨーロッパ式に日にちを表すと 22/7 となります。

これを分数だと思うと、
22/7=3.142857...となり、円周率に非常に近いためそう言われています。

なお円周率が22/7よりも大きいことの証明として次の積分が有名です。
是非計算してみてください!

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi$$

1 42 117

図 5: 和からのツイートから

円周率の近似分数として、 $\frac{22}{7}$ や $\frac{355}{113}$ の存在は知っていたが、詳しいことは知らなかった。見た瞬間、「面白い!」と思ったので、早速講習の問題に取り上げることにした。実際の計算は、分子を展開した上で

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{x^4 - 4x^5 + 6x^6 - 4x^7 + x^8}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{1+x^2} \right) dx \\ &= \left[\frac{x^7}{7} - \frac{2}{3}x^6 - \frac{4}{3}x^3 + 4x - 4 \arctan x \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 - \pi = \frac{22}{7} - \pi \end{aligned}$$

となり、被積分関数が $0 \leq x \leq 1$ において負でないことから

$$\frac{22}{7} - \pi > 0$$

が成り立つ.

この定積分は、見かけはゴツイが実際の計算はそうでもないの、生徒たちはワイワイ言いながら計算を進めていた. 計算結果から、 π の近似分数としての $\frac{22}{7}$ にも興味を持ってくれたようだった.

余談だが、この年度の信州大学の前期試験において、この定積分に関係する大問があった.

— 2021 年度信州大学入試問題 (理系) —

以下の問いに答えよ.

(1) 定積分 $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx$ を求めよ.

(2) 定積分 $\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx$ を求めよ.

(3) 不等式 $\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630}$ を示せ.

ズバリ的中！！ であつたが、この学年は前期での信州大学受験者はいなかった・・・残念.

5 解けない？ 漸化式

筆者は「数列の極限」の単元で「ニュートン法」を扱うことにしている (因みに、前回の研究会の [10] でも題材になっていた). その際、 $\sqrt{2}$ に収束する数列として

$$a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$$

を取り上げている.

この実践は、[11] で紹介しているが「**解けない漸化式**」を「**漸化式のままで処理する例**」として授業で扱っていた. 今年度、授業で扱うにあたって予習をしていたところ、実は**このタイプの漸化式が解ける**との記述を [12] で見つけた.

今までずっと「解けない漸化式」と思っていたので、ちょっとびっくりした. 以下、一般項を求める概略を見ていきたい.

まず、数学的帰納法によって「任意の自然数 n に対して、 $a_n > \sqrt{2}$ である」ことを示すことができる. 次に、

$$\begin{aligned} a_{n+1} \pm \sqrt{2} &= \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} \pm \sqrt{2} \\ &= \frac{a_n^2 + 2 \pm 2\sqrt{2}a_n}{2a_n} \\ &= \frac{(a_n \pm \sqrt{2})^2}{2a_n} \quad (\text{複号同順}) \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\frac{a_{n+1} + \sqrt{2}}{a_{n+1} - \sqrt{2}} = \left(\frac{a_n + \sqrt{2}}{a_n - \sqrt{2}} \right)^2$$

が成り立つ (分母は 0 にならない). ここで、

$$b_n = \frac{a_n + \sqrt{2}}{a_n - \sqrt{2}}$$

とおくと、 $b_{n+1} = b_n^2$ より $n \geq 2$ に対しては、 $b_n = b_1^{2^{n-1}}$ となる. $n = 1$ のときも、 $b_1 = b_1$ となり成り立つ. したがって、

$$\frac{a_n + \sqrt{2}}{a_n - \sqrt{2}} = b_1^{2^{n-1}}$$

が成り立ち、これを a_n について解くと

$$a_n = \sqrt{2} \cdot \frac{b_1^{2^{n-1}} + 1}{b_1^{2^{n-1}} - 1}$$

である (分母は 0 にならない).

$$b_1 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$$

だから、

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{2} \cdot \frac{b_1^{2^{n-1}} + 1}{b_1^{2^{n-1}} - 1} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{2^{n-1}} + 1}{\left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{2^{n-1}} - 1} \\ &= \sqrt{2} \cdot \frac{(\sqrt{2} + 1)^{2^{n-1}} + (\sqrt{2} - 1)^{2^{n-1}}}{(\sqrt{2} + 1)^{2^{n-1}} - (\sqrt{2} - 1)^{2^{n-1}}} \end{aligned}$$

を得ることができる. この一般項を用いると,

$$a_1 = \sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} = 2$$

$$a_2 = \sqrt{2} \cdot \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3}{2}$$

$$a_3 = \sqrt{2} \cdot \frac{34}{24\sqrt{2}} = \frac{17}{12}$$

$$a_4 = \sqrt{2} \cdot \frac{1154}{816\sqrt{2}} = \frac{577}{408}$$

$$a_5 = \sqrt{2} \cdot \frac{1331714}{941664\sqrt{2}} = \frac{665857}{470832}$$

となり, 漸化式で求めた値と確かに一致する. また, $a_n \rightarrow \sqrt{2}$ ($n \rightarrow \infty$) であることも, すぐに分かる.

「解けない漸化式」の例として紹介していたので, 後日の授業で「Web 上で, 実は解けるって記事を見つけたんだよね」と告げた後に一般項を書き出すと, その複雑さに興味津々であった (導き方のヒントを聞きにくる生徒も).

まあしかし, $\sqrt{2}$ に収束することは, 漸化式から「はさみうちの原理」を利用した方が楽なのは確かである.

6 終わりに

日頃から Web を検索していると

- 面白いことを考えるなあ
- 着眼点がいいなあ
- 授業で扱いたい

と思うネタがたくさん転がっている.

授業において, 紹介で済ませる場合もあれば, 本格的に取り上げる場合もある. 「授業に彩りを添えるスパイス」として, 今後も積極的に取り上げていきたい. また, 最後の漸化式の例のように「知識のアップデート」は常に意識しておきたい.

拙文の作成にあたり, 元ネタ [1][2][4][5][7][12] の方々とは連絡を取り, 画像等の引用について許可をいただいた. また, ランドルト環の画像の引用については, [3] に許可をいただいた. それぞ

れ感謝申し上げたい. 個人的には, その際の連絡を通して著作権関係をクリアにし, 外部の方と関係を築いていくのは大事なことだと考えている.

参考文献等

- [1] こあたん  こあらの学校さんの Twitter
<https://twitter.com/KoalaEnglish180>
- [2] 宮本一賢  Miyamol さんの Twitter
<https://twitter.com/38mo1>
- [3] にっぽんの病院 医療施設とモノ・ヒト・コト
https://nippon-no-byoin.com/glossary/landolt_ring.html
- [4] 鰯坂もっちょ  さんの Twitter
https://twitter.com/motcho_tw
- [5] べけむさんの Twitter
<https://twitter.com/nbchem>
- [6] GeoGebra によるランドルト環
<https://www.geogebra.org/m/qx9bre9m>
- [7] 和から@大人のための数学・統計教室の Twitter
https://twitter.com/wakara_nagomi
- [8] 円周率が 22/7 より小さいことの証明
<https://ja.wikipedia.org/wiki/円周率が22/7より小さいことの証明>
- [9] 「2022 年受験用 全国大学入試問題正解 数学」旺文社
- [10] 安田富久一「近似値遊び」
第 123 回数学教育実践研究会レポート
- [11] 長尾良平「いろんな極限で One more thing」
第 104 回数学教育実践研究会レポート
- [12] ニュートン法型漸化式の一般項を求める
<https://migawariw.hatenablog.com/entry/2022/09/16/230145>