第123回数学教育実践研究会　レポート発表

数列の導入でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和4年11月26日　Online 数実研

1　はじめに

前回の第122回数実研では「数列の和」についての実践を紹介したが, 本レポートでは数列の導入時の工夫を幾つか紹介していきたい.

今年度の実践で意識したのは, 次の点である.

- 実は忖度していることを伝えること
- 漸化式を早めに紹介すること
- 和の公式を色んな角度から眺めること
- アソビを取り入れること

2　忖度してない？

この単元の導入としては,

- 与えられた数列の規則性を考察させ
- それを基に一般項を予想させる

ことから始めることが多いと思う. 何問か考えさせた後,「$\{a_n\}: 1, 4, 9, 16, \ldots$ という数列について一般項を考えたら, $a_n = n^2$ って答えると思うけど, 答えってこれだけ？」「何か勝手に仮定してない？」と問いかけた.

「これなんかどう？」と, 次の式を紹介した.

$$a_n = -n^4 + 10n^3 - 34n^2 + 50n - 24$$

生徒には n^2 以外の発想は無かったようで, 唐突に提示された式に対して笑いが起きていた.

その授業の最後に取り組ませたプリントでは, 授業の流れを受けて, 次の問いも出題した.

問1　数列 $\{a_n\}$ が $\{a_n\}: 1, 4, 9, \ldots$ であるとき,（本来は）一般項は決まらないが, $a_n = n^2$ と考えるのが常識的である. そこで,（忖度せずに）それ以外のものを1つ作ってみよ（先ほど紹介したもの以外で）.

解答例

2次式だと3つの値を指定されると確定するので, n^2 以外には存在しない. そこで, 3次式を考える.

$f(n) = an^3 + bn^2 + cn + d$ とおくと,

$$f(1) = a + b + c + d = 1 \cdots ①$$
$$f(2) = 8a + 4b + 2c + d = 4 \cdots ②$$
$$f(3) = 27a + 9b + 3c + d = 9 \cdots ③$$

ここで, a, b, c, d の値を決定するのに条件がもう1つ欲しいので, 例えば $f(4) = 22$ だとすると,

$$f(4) = 64a + 16b + 4c + d = 22 \cdots ④$$

①②③④ より, $a = 1, b = -5, c = 11, d = -6$ となり, 一般項が次の式で与えられる.

$$a_n = n^3 - 5n^2 + 11n - 6$$

この解法は, $f(4)$ の値を設定次第で a, b, c, d の値がきれいになるかどうかが決まる. もう少しうまくやるなら, 次の解法だろう.

別解

$$\begin{aligned} f(n) &= a(n-1) + b(n-1)(n-2) \\ &\quad + c(n-1)(n-2)(n-3) + d \end{aligned}$$

とおくと,

$$f(1) = d = 1$$
$$f(2) = a + d = 4$$
$$f(3) = 2a + 2b + d = 9$$

となり, $d = 1, a = 3, b = 1$ が求まる. このとき,

$$f(4) = 9 + 6 + 6c + 1 = 6c + 16$$

となるので, $f(4) = 22$ とすれば, $c = 1$ と整数値で求まる. これは, $f(n)$ を [1] にあるニュートン補間で求めた訳である.

一方, 漸化式による数列の定義は, ここまでで述べたような忖度が入り込む余地がない訳で, 厳密である. また, 数列の記号の練習にもなるので, 初回の授業から扱うことにした. ただ, この段階で扱ったのは, 初期条件と漸化式から先々の項を求める計算のみで, 漸化式を解くことは扱っていない.

問 2　$a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n + 3n$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の第 2 項から第 5 項までを求めよ.

解答例

$(n = 1)$　$a_2 = 2a_1 + 3 \cdot 1 = 2 \cdot 2 + 3 = 7$
$(n = 2)$　$a_3 = 2a_2 + 3 \cdot 2 = 2 \cdot 7 + 6 = 20$
$(n = 3)$　$a_4 = 2a_3 + 3 \cdot 3 = 2 \cdot 20 + 9 = 49$
$(n = 4)$　$a_5 = 2a_4 + 3 \cdot 4 = 2 \cdot 49 + 12 = 110$

なお, 漸化式を利用して各項を求める際には,「n が幾つのときなのか」を意識することを強調し, 板書でも添えることにしている.

因みに, 演習プリントには頭の体操も兼ねて, 次のような問題も混ぜておいた.

問 3　等比数列 $\{a_n\} : -1, 1, -1, 1, \ldots$ の一般項は $a_n = (-1)^n$ となるが, -1 を使わない形でこの数列の一般項を表してみよ.

解答例　$-1, 1, -1, 1, \ldots$ が周期的なので, 周期性をもつ三角関数を用いて表すことを考えると

$$a_n = \cos n\pi\ ,\ \sin\frac{2n+1}{2}\pi\ ,\ \tan\frac{2n+1}{4}\pi$$

などを見つけることができる.

3　文章で定義された一般項

「文章を数式で表現した上で処理する」ことも, 大事な能力である. そこで, 演習プリントには, 次の問も混ぜておいた.

問 4　数列 $\{a_n\}$ の一般項は「$\sqrt{2}$ の小数第 n 位までに等しい」とする. そのとき, 一般項 a_n を数式を用いて表せ (数式中に $\sqrt{2}$ を使って構わない).

「$\sqrt{2}$ の小数第 n 位までを取り出したい」というのは,「第 $(n+1)$ 位から先を切り捨てること」に相当する. 今まで扱ったことのある道具で, 切り捨てることに相当する操作をするものとして, ガウス記号に気がつくかどうかである.

解答例

$\{a_n\} : 1.4, 1.41, 1.414, \ldots$ である. 実数 x の整数部分のみを取り出せる, ガウス記号 $[x]$ を用いることによって,

$$a_n = \frac{\left[\sqrt{2} \cdot 10^n\right]}{10^n}$$

と表せる.

過去には, 次のような問を実力テストで出題したこともあった.

問 5　数列 $\{a_k\}$ の一般項 a_k を $a_k = \left[\sqrt{k}\,\right]$ で定める. 次の問に答えよ.

(1) $a_{10}, a_{100}, a_{1000}$ をそれぞれ求めよ.

(2) 数列 $\{b_n\}$ の各項を「$b_n : a_k = n$ となる k の個数」として定めるとき, b_1, b_2, b_3, b_{10} を求めよ.

(3) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2016}\left[\frac{b_k + 79}{k^2}\right]$ を求めよ.

解答例

(1) $a_{10} = 3\,,\ a_{100} = 10\,,\ a_{1000} = 31$

(2) $\{a_k\}$ の最初の方の項を具体的に書き出してみると，

$$\{a_k\}: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, \ldots$$

となるので，$b_1 = 3, b_2 = 5, b_3 = 7$ である．
また，$a_k = 10$ となるのは

$$\left[\sqrt{10^2}\right], \left[\sqrt{10^2+1}\right], \ldots, \left[\sqrt{11^2-1}\right]$$

だから，その個数は

$$(11^2-1) - 10^2 + 1 = 121 - 100 = 21$$

となり，$b_{10} = 21$ である．

(3) $a_k = n$ となるのは

$$\left[\sqrt{n^2}\right], \left[\sqrt{n^2+1}\right], \ldots, \left[\sqrt{(n+1)^2-1}\right]$$

だから，その個数は

$$\{(n+1)^2-1\} - n^2 + 1 = 2n+1$$

となり，$b_n = 2n+1$ である．

(4) まず，$\dfrac{b_k+79}{k^2} = \dfrac{2k+80}{k^2}$ である．次の不等式

$$\frac{2k+80}{k^2} < 1$$

を解くと，$k < -8, 10 < k$ を得るので，求める和について，第 11 項から先については全て 0 となる．したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2016}\left[\frac{b_k+79}{k^2}\right] &= \sum_{k=1}^{10}\left[\frac{2k+80}{k^2}\right]\\ &= \left[\frac{82}{1}\right] + \left[\frac{84}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{100}{100}\right]\\ &= 126\end{aligned}$$

因みに，(4) を出題したのは前年度の次の入試問題を意識したからであった．

2016 年度北大入試問題（文系）$\boxed{4}$

x, y を自然数とする．

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ．

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2} + \dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 (x, y) をすべて求めよ．

分母と分子のオーダーに着目する．x がある程度大きくなると，与えられた分数式の値が 1 未満になることが見てとれる．つまり，値が自然数となるような x は限定されることになる．

その感覚の話を伝えたくて作問したことを覚えている．

4　終わりに

今回取り上げたのは，数列導入時の小ネタ集である．ただ，他分野との関連を見せたり復習をしたりと，小ネタだけに終わらないようには意識した．「数列の和」や「アソビを取り入れること」についての実践については [3][4] を参照いただきたい．また，漸化式（極限を含む）の実践については，[5] も参照されたい．

参考文献等

[1] 安田富久一「本日の料理は “多項式による近似” です」
第 84 回数学教育実践研究会レポート

[2] 大学入試数学電子図書館
https://www.densu.jp/

[3] 長尾良平「坪田算数で One more thing」
第 110 回数学教育実践研究会レポート

[4] 長尾良平「数列の和で One more thing」
第 122 回数学教育実践研究会レポート

[5] 長尾良平「いろんな極限で One more thing」
第 104 回数学教育実践研究会レポート