第122回数学教育実践研究会　レポート発表

数列の和でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和4年8月27日　Online 数実研

1　はじめに

今年度は2年生の担任をしており, 先日, 数列の単元を終えた. その実践の中から,「数列の和」に関するものを幾つか取り上げてまとめたものが, 本レポートである.

オリジナル？ な内容もあるが, 殆どは今までに発表されてきたものの相乗り（良いとこ取り）である.

2　回転技の紹介

数列の和では, おさえるべき公式が幾つかある. 授業では, 公式とともにその導出方法にも注目するように強調した.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^p$ $(p=1,2,3)$ については, [1] を参考に回転による統一的な視点を優先した.

(1)　$S = 1+2+\ldots+n$ は, 逆順にしたものを加えて

$$2S = \underbrace{(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)}_{n\text{ 個}}$$

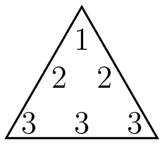
を考え, これから $S = \dfrac{n(n+1)}{2}$ を導く流れはよく知られている（$2S$ 法）.

この「逆順のものを加える」という発想は, 元の和を**「180° 回転して加える」**と見ることもできる.

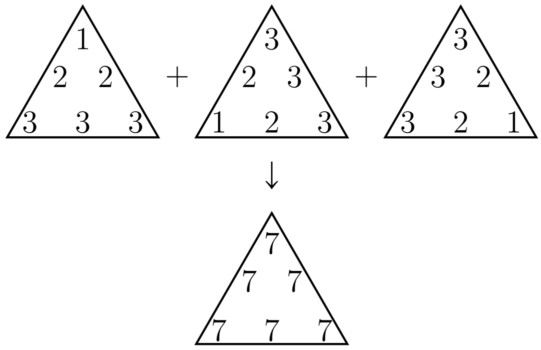
(2)　$S = 1^2+2^2+\ldots+n^2$ は, 具体的に $n=3$ の場合でまず考えてみたい.

$$\begin{aligned} S &= 1^2+2^2+3^2 \\ &= 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 3 \end{aligned}$$

と考えられるから, 元の和を



と表してみる. これを 120° 回転, 240° 回転したものを考え, その3つを加えると,



となる. この結果を式で表すと,

$$3S = 6\times 7 = (1+2+3)(1+3+3)$$

となるので, 一般化すると

$$\begin{aligned} 3S &= (1+2+\ldots+n)(1+n+n) \\ &= \frac{1}{2}n(n+1)(2n+1) \end{aligned}$$

となり,

$$S = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を得る（$3S$ 法）．

(3)　$S=1^3+2^3+\ldots+n^3$ についても，具体的に $n=3$ の場合でまず考えてみる．授業では，$2S$ 法と $3S$ 法を真似して，$4S$ 法について

- 何度回転させるのか
- どのように数を配置するのか

を生徒達に考えさせた．

$$\begin{aligned} S &= 1^3+2^3+3^3 \\ &= 1+(2+4+2)+(3+6+9+6+3) \end{aligned}$$

と考えられるから，元の和を

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{matrix}}$$

と表してみる．これを 90° 回転，180° 回転，240° 回転したものを考え，その 4 つを加えると，

$$\boxed{\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{matrix}}+\boxed{\begin{matrix} 3 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}}+\boxed{\begin{matrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{matrix}}+\boxed{\begin{matrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{matrix}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\begin{matrix} 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 \\ 16 & 16 & 16 \end{matrix}}$$

となる．この結果を式で表すと，

$$4S = 9\times 16 = 3^2\cdot(1+3+3+9)$$

となるので，一般化すると

$$\begin{aligned} 4S &= n^2(1+n+n+n^2) \\ &= n^2(n+1)^2 \end{aligned}$$

となり，

$$S=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

を得る．

これらの「算数的な方法」で先に公式を導いた上で，教科書にある「恒等式を利用した方法」に触れた方が，生徒の天下り感は幾分減少するように思われる．

3　キャンセル技の利用

数列の和の公式を作るには，アイディア勝負な部分も多い．よく用いられるのは，

$$a_n=f(n+1)-f(n)$$

となるような $f(n)$ を発見し，

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_k &= (f(2)-f(1)) \\ &\quad +(f(3)-f(2)) \\ &\quad +\ldots \\ &\quad +(f(n+1)-f(n)) \\ &= f(n+1)-f(1) \end{aligned}$$

とする，いわゆる「キャンセル技」である．

授業では，**「1 つの和の公式は色んな導き方がある」**ことを伝えたかったので，[2] を参考に次のような展開で授業を行った．

まず，次の関係式を板書することから授業がスタートする（どちらの和も，Σ の導入時に紹介・計算済みである）．

$$\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

2 つ目の式については，キャンセル技の復習も兼ねて

$$k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)$$

の恒等式から成り立つことを確認した．

その上で，「では，これはどうなるかな？」と，次の和を問いかけて考えさせた．

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$$

生徒達は，

$$\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

と予想したので，「$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ に倣って恒等式を見つけて証明してみよう！」と促すと，多くの生徒が (周りと相談しながら) 証明を完成させた．

それを確認した後,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k^2 &= \sum_{k=1}^{n}\{k(k+1)-k\}\\ &= \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)\\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

という計算例を紹介し,**「こういう授業展開も考えられるね？ という提案なんだけど・・・」**と問いかけたところ, 微妙な表情を見せる生徒と頷く生徒に反応は分かれた.

この後は,「じゃあ, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ もやってみよう！」と促した. さらに,「$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)$ を考えて, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$ の公式も作ってみよう！」と, 得意な生徒向けに投げかけて, この授業は終了した.

4　色んな観点から見る

以前,（別の教員が担当する）講習で扱っていた問題中に次の等式があった.

$$1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+\ldots+n\cdot 1 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

この等式を見た際, **「右辺が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$ に等しいので, この等式は Σ 計算以外で示すことができるのでは？」**と考えた.

筆者は1つの解を見つけた上で, **「和を色んな観点から見る」きっかけにして欲しい**と考え, 授業で次のように出題した.

問　このことを, **文字式は習っている中学生にも理解出来るように説明**してみよう！

解１（筆者のもの）　組合せを工夫する.

$n=3$ の $1\cdot5+2\cdot3+3\cdot1=1^2+2^2+3^2$ の場合だと, 左辺は

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

の和と見ることができて,

$$\begin{aligned}&1+(1+1+2)+(1+2+1+2+3)\\ &\quad=1+(2+2)+(3+3+3)=1^2+2^2+3^2\end{aligned}$$

が成り立つので, これを n 段で考えれば良い.

解２　S_n と S_{n-1} を比較する.

まず, 具体的に $n=4$ の場合だと,

$$\begin{aligned}S_4 &= 1\cdot7+2\cdot5+3\cdot3+4\cdot1\\ S_3 &= 1\cdot5+2\cdot3+3\cdot1\end{aligned}$$

となるので, 差をとると

$$\begin{aligned}S_4-S_3 &= 1\cdot2+2\cdot2+3\cdot2+4\\ &= 2\cdot(1+2+3)+4\\ &= 12+4=4^2\end{aligned}$$

が成り立つ. これを一般化すると,

$$\begin{aligned}S_n &= 1\cdot(2n-1)+2\cdot(2n-3)+\ldots(n-1)\cdot3+n\cdot1\\ S_{n-1} &= 1\cdot(2n-3)+2\cdot(2n-5)+\ldots(n-1)\cdot1\end{aligned}$$

となるので, 差をとると

$$\begin{aligned}S_n-S_{n-1} &= 1\cdot2+2\cdot2+\ldots+(n-1)\cdot2+n\\ &= 2\{1+2+\ldots+(n-1)\}+n\\ &= 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+n\\ &= (n-1)n+n=n^2\end{aligned}$$

（自然数の和は中学生でも理解可能とする）

以上より, $S_n=S_{n-1}+n^2$ が成り立ち, 2乗の和との繋がりが見える.

解３　2乗の和とそれ以外の部分に分ける.

$n=3$ の場合

$$\begin{aligned}&1\cdot5+2\cdot3+3\cdot1\\ &\quad=(1^2+4)+(2^2+2)+(3^2-6)\\ &\quad=1^2+2^2+3^2\end{aligned}$$

$n=4$ の場合

$$\begin{aligned}1\cdot 7+2\cdot 5+3\cdot 3+4\cdot 1\\ &=(1^2+6)+(2^2+6)+3^2+(4^2-12)\\ &=1^2+2^2+3^2+4^2\end{aligned}$$

等が成り立つことから, 納得してもらう.

この考え方が一般的に成り立つことは, 次の計算で確かめられる.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} k\cdot\{2n-(2k-1)\} &= \sum_{k=1}^{n}(2nk-2k^2+k)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\{k^2-3k^2+(2n+1)k\}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k-3k^2\}\\ &\quad+\sum_{k=1}^{n}k^2\end{aligned}$$

と変形することができ,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\{(2n+1)k-3k^2\} &= (2n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\\ &\quad -3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\ &=0\end{aligned}$$

が成り立つので,

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot\{2n-(2k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}k^2$$

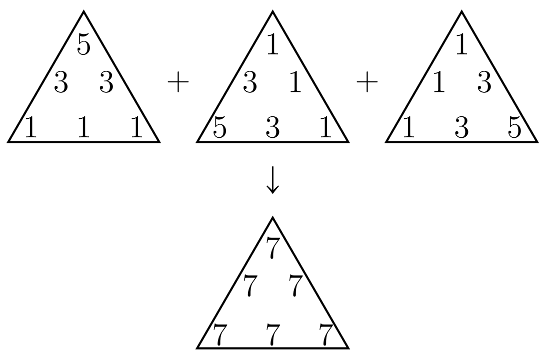
が確認できる.

解４　$3S$ 法と同じ考え方で.

$n=3$ の場合

$$1\cdot 5+2\cdot 3+3\cdot 1=5\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 3$$

と見て,



となる. これは,

$$3S=6\times 7=(1+2+3)(1+1+5)$$

と考えられるので, 一般化すると

$$\begin{aligned}3S&=(1+2+\ldots+n)\{1+1+(2n-1)\}\\ &=\frac{1}{2}n(n+1)(2n+1)\end{aligned}$$

となり,

$$S=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

を得る.

$3S$ 法は $\sum_{k=1}^{n}k^2$ で用いたので, この場面で登場しても何の違和感もない（むしろ自然なぐらいである）が, 筆者が授業で紹介した道具を活用してくれたことが, 個人的には嬉しかった.

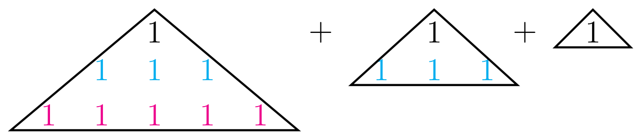
解４を編み出した生徒が席に一度戻った後,「3D！ 3D！」と興奮気味に再度説明したのが次の解である.

解５　立体的に積み上げてみる.

$n=3$ の場合

$$\begin{aligned}&1\cdot 5+2\cdot 3+3\cdot 1\\ &=1\cdot(1+1+1+1+1)+2\cdot(1+1+1)+3\cdot 1\end{aligned}$$

と見て,

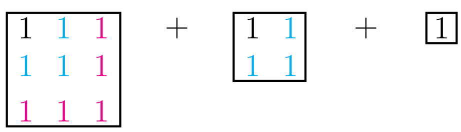


を重ねた立体をイメージする. そのとき,

$$1\cdot 5+2\cdot 3+3\cdot 1=9+4+1=3^2+2^2+1^2$$

が成り立っている（これはスゴい！）. このことは, $1+3+\ldots+(2n-1)=n^2$ であることから, 一般化できる.

この解法が発表された瞬間, クラス中で拍手が起こった（筆者も感心した）. なお, 解５では「1」を三角形に配置したが, 正方形に配置した方が分かりやすい（これは, 別の生徒が考案したものである）. つまり, 次のように配置する.



5　終わりに

数列は（生徒からすると）「公式適用術」的な印象が強い単元かと思うが,「場合の数・確率」や「整数」とならんで, **手を動かして規則性・法則性を探る「実験的要素」も強い**単元である.

本レポートでは,「少し寄り道をしながら, 式を色んな観点から作る・眺める」実践を紹介した. 生徒達には, 種々の公式や関係式を「(一方的に）与えられたものではなく, **成り立ちを理解しながら導いた**」という感覚を大事にして欲しいと考えている.

参考文献等

[1] 石原諭「$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ の計算方法について〜回転にこだわって〜」
数学教育実践研究会レポート

[2] 中村文則「$\sum k^p$ 計算のちょっとした小手技」
第 31 回数学教育実践研究会レポート