第121回数学教育実践研究会　レポート発表

教員の疑問でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和4年6月4日　Online 数実研

1　はじめに

普段授業をしていて, 生徒の質問を共有する場面はよくあると思うが, 教員の疑問を共有する場面は, それと比べるとあまり多くないと思われる. そこで今回は, 教員の疑問に基づく話題を紹介していきたい.

2　比例式の値

まず, 数学II「等式の証明」の単元で扱う問題を取り上げたい.

問1　$\dfrac{b+c}{a}=\dfrac{c+a}{b}=\dfrac{a+b}{c}$ の値を求めよ.

解答としては, 「$=k$」とおいて分母を払うと

$$b+c=ak\ ,\ c+a=bk\ ,\ a+b=ck$$

となり, 3つの式を加えて

$$(a+b+c)(k-2)=0$$

を得る. この後, $a+b+c=0, k=2$ に場合分けして考えるが, 取り上げたいのは前者の方である.

$a+b+c=0$ のとき, $b+c=-a$ が成り立つので, 与式の左辺から

$$\frac{b+c}{a}=\frac{-a}{a}=-1$$

となる. 中辺, 右辺からも同様にして -1 という値を得ることができる. したがって,

$$a+b+c=0\text{のとき,}\ -1$$

という解答を得る.

疑問1　「$a+b+c=0$ を満たす具体的な値として, $a=1, b=1, c=-2$ を代入して -1 を取ることを示し, それで終えてはいけないのか？」

つまり, 「『$a+b+c=0$ のとき, -1』のように一般化して答えないといけないのか？」ということである.

この問いを, 「数実研メーリングリスト IZUMI」に投稿したところ, 会員の安田先生や平間先生から「a, b, c に具体的な値を代入して求めたとき, **値の一意性が保証されない**ので△ではないか」との回答が寄せられた.

数学において「◯□を求めよ」と問われたら,

(1) 条件を満たすものを全て求め

(2) 他に条件を満たすものが無いことを示す

ことが要求されている. このタイプの問題では, 「導いた条件式から, 値が求まったとしても1つ」という意識があったため, 「値を取れることさえ示せればOK」だと暗に考えていた.

そこで生まれた疑問は, **「値を複数取りうるケースは無いのだろうか？」**である. この疑問については, **変数の範囲を複素数にする**ことによって, そのようなケースが存在することを安田先生から教えていただいた（実数の範囲では見つけられていない）.

そのやり取りを受け, 実力テストで次の問題を出題した.

実力テストでの出題

比例式 $\dfrac{b+2c}{a}=\dfrac{c+2a}{b}=\dfrac{a+2b}{c}$ を考える.
次の問いに答えよ.

(1) a,b,c を実数の範囲で考えるとき, この比例式の値を求めよ.

(2) a,b,c を複素数の範囲で考えるとき, この比例式の値を求めよ.

3　三角形の決定

次に, 数学 I「図形と計量」の単元で扱う問題を取り上げたい.

問 2　$A=60°, B=45°, b=\sqrt{2}$ のとき，他の辺の長さ，角の大きさを求めよ.

$C=75°$ は直ぐに分かり, 正弦定理で $a=\sqrt{3}$ も分かる．c が問題である．$\sin 75°, \cos 75°$ の値を使わないのであれば, 余弦定理を用いることになるが,

- $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, A=60°$
- $a=\sqrt{3}, b=\sqrt{2}, B=45°$

の一方を選択して, c についての 2 次方程式を解く．その際, 2 次方程式の解は

- 異符号
- 同符号（ともに正）

の何れかであり, c の値を決定するために, 同符号の場合は **「辺と角の大小関係」を援用**することになる.

疑問 2　「2 次方程式をつくる段階で, どちらを選択すると正の解と負の解になるか, 見分ける方法ってあるのでしょうか？」

筆者が某外食チェーン店で夕食を食べていた際に, メーリングリストに投稿があったので, ハンバーグを食べながら考えてみた.

「2 つの解が異符号」となって欲しいが, それは**「定数項が負」**のときである．余弦定理から c についての 2 次方程式をつくると, それぞれ

- A を利用：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ より
  $c^2-(2b\cos A)c+(b^2-a^2)=0$
- B を利用：$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ より
  $c^2-(2a\cos B)c+(a^2-b^2)=0$

となるが, 条件より $a>b$ であるから定数項が負となるのは前者である.

以上より, 辺の長さを比較して, **「(長い方)^2 が左辺にくる」**ように余弦定理を適用すれば, 必ず異符号の解が現れることが分かる.

4　パラメータ表示と極形式

職員室にいた際, 同僚に呼ばれて聞かれたのが次の疑問である.

疑問 3　「カージオイドのパラメータ表示

$$\begin{cases} x=2\cos\theta-\cos 2\theta \\ y=2\sin\theta-\sin 2\theta \end{cases}$$

と, それらの両辺を 2 乗して加えることによって出来る極形式

$$r^2=5-4\cos\theta$$

をそれぞれ GRAPES で描かせると, 図形が一致しないんだけど何故？」

話を受けて早速 GRAPES で描画させてみると, 確かに 2 つの曲線が一致しないことが見て取れた．青がパラメータ表示, 赤が極形式表示のものである.

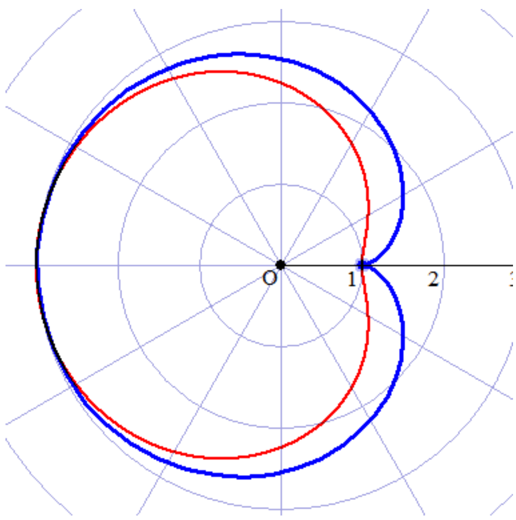
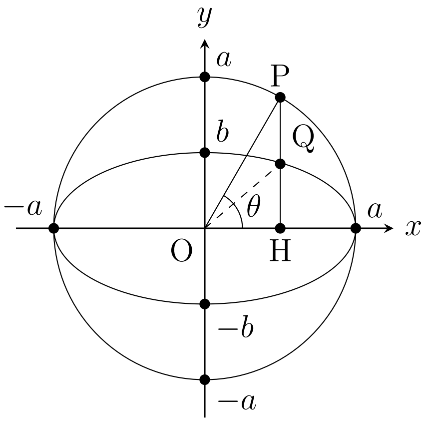


図 1: 確かにズレている・・・

「極形式は偏角と距離だよな・・・」と呟きながら，しばらく考えていた．ふと思いついたのは，**楕円のパラメータ表示**のことだった．

楕円のパラメータ表示



楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b)$ 上の点 Q は，

$$\mathrm{Q}(a\cos\theta, b\sin\theta)$$

とパラメータ表示できるが，角 θ については $\theta=\angle\mathrm{POH}$ であって，$\theta=\angle\mathrm{QOH}$ でない．

そこで，「これと同じようなことが起こっているのではないか？」と当たりをつけてみた．

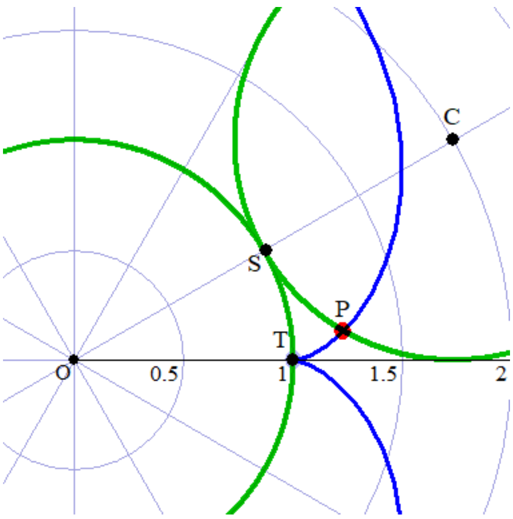


図 2: カージオイドの定義からすると・・・

カージオイドは外サイクロイドの一種である．その定義は，「定円に外接しながら円が滑らずに回転するときの円周上の定点の軌跡」であり，特に「2 つの円の半径が等しい場合」がカージオイドである．「滑らずに」という条件から，

$$\text{弧 ST の長さ} = \text{弧 SP の長さ}$$

が成り立っており，図 2 では点 P が条件を満たす点である．

ここで気をつけたいのは，θ は **2 つの円の接点 S の偏角であって，カージオイド上の点 P の偏角ではない**ことである．一方，極座標表示した際は，動点の偏角が θ となる．

GRAPES の「画像の連続保存」機能を用いて，パラパラアニメーションを作成してみた．パラメータ表示の曲線を C_1，極座標表示の曲線を C_2 とし，対応する点の動きを見ると，確かに

- C_2 上の点の偏角は接点 S の偏角に一致
- C_1 と C_2 で対応する点の絶対値は一致

していることが確認できる．

以上のことから，楕円のパラメータ表示の際と同じ注意が必要なことが分かった．

5　終わりに

昨今の学習指導要領では**「探究活動」が花盛り**であり，問い（の解決）が次の問いに繋がる**「問いの連鎖」**が重要視されている．

「比例式」での問いは，「値が一意に決まらないことはあるのだろうか？」という**新たな疑問に繋がり**，まさしく探究活動の一例と言えるだろう．また，「三角比」「パラメータ表示」での問いは，**既知の知識の利活用**ということで，これまた探究色を帯びた活動となっている．

本稿の内容は，「教員の疑問を教員が解決した」ものだが，**「教員の疑問を生徒に投げかけてみる」**のも面白いかもしれない．

今回紹介した 3 つの疑問のうち，2 つは「数実研メーリングリスト IZUMI」に投稿されて意見交換されたものである．数実研会員が，気軽に投稿・意見交換できる場として，今後も活用していただけるとありがたい．

参考文献等

[1] 「どこまで記述するのか」
数実研メーリングリスト IZUMI

[2] 「三角（関数を含む）方程式・不等式について」
数実研メーリングリスト IZUMI