第120回数学教育実践研究会　レポート発表

図形と計量でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和4年1月29日　Online 数実研

1　はじめに

三角比（図形と計量）の単元は必履修科目の数学Iに含まれることから，（数実研に限らず）数多くの実践やレポートが発表されてきた.

本レポートでは, それらのいいとこ取りをして実施した, 今年度の授業を振り返ってみたい.

2　指導の流れ

前々回で発表した [1] でも述べたが, 最近は単元全体を通してストーリー性をもたせたいと考えている. そのことから, 今年度は次のような流れで授業を組み立てることにした.

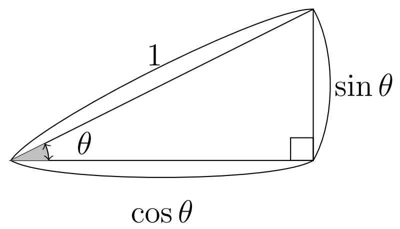
1. 導入編
   - 三角比の導入・有名角の三角比
   - 三角比の拡張
   - 定義から分かること・相互関係
2. 拡充編
   - 測量
   - 面積公式
   - 正弦定理
   - 余弦定理
3. 応用編
   - 形状決定・三角形の決定
   - 面積公式（発展）
   - 空間への応用

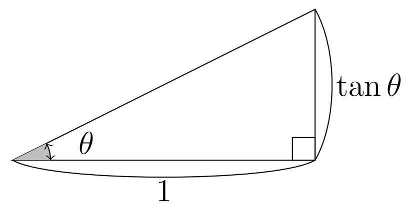
3　導入編

教科書通りに定義した後, 単位円による定義を見据えて,

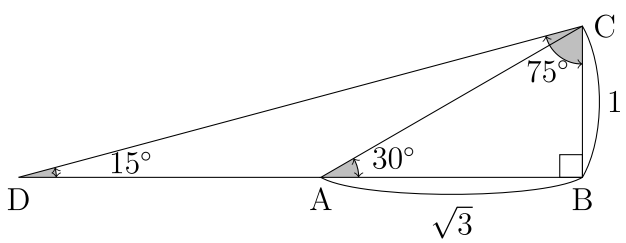
- 斜辺が1の直角三角形で, 縦が sin, 横が cos
- 底辺が1の直角三角形で, 縦が tan

であることを強調した.





続けて, $45°, 30°, 60°$ の三角比を求めた後, 次の図を利用して $15°, 75°$ の三角比を求めた.



$\angle\mathrm{CDA} = \angle\mathrm{DCA} = 15°$ より, $\triangle\mathrm{ACD}$ は二等辺三角形で, $\mathrm{AD} = \mathrm{AC} = 2$. したがって,

$$\begin{aligned}\mathrm{CD} &= \sqrt{(2+\sqrt{3})^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{8 + 2\sqrt{12}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}\end{aligned}$$

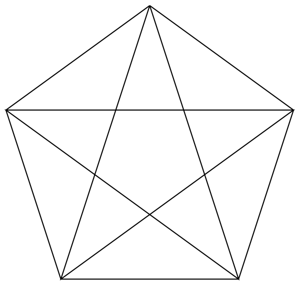
が分かり（二重根号の復習ができる）,

$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

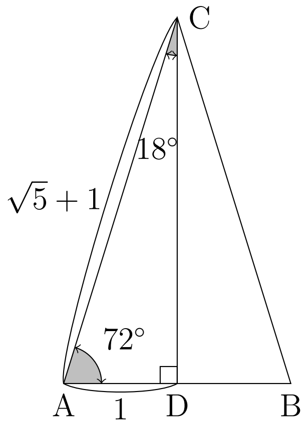
$$\cos 15^\circ = \frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

などが得られる（有理化の復習もできる）.

また,「図形と計量」の前に「図形の性質」を扱っており, そこで正五角形の作図を取り上げた.



その際に扱った次の三角形を利用して, $72^\circ, 18^\circ$ に対する三角比の値も求めた.



$$\mathrm{CD} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)^2 - 1^2} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

であり（二重根号が外せない実際例）,

$$\cos 72^\circ = \frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

$$\sin 72^\circ = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

などが得られる. 実は, 実力テストで「単位円に内接する正五角形」をテーマに方程式 $x^5 = 1$ に関係する出題をしており, それについて伏線回収をすることができた.

このようにして, 直角三角形を用いた三角比の定義に少し親しんだ辺りで, 単位円を用いた定義の拡張を行う（360° まで）. その際には,「数学における『拡張』」について, 以前の授業で触れた「0 乗や負の整数に対する指数」の話を振り返り,

- 従来成り立っていた規則を大事にしながら
- 適用できる範囲を広げる

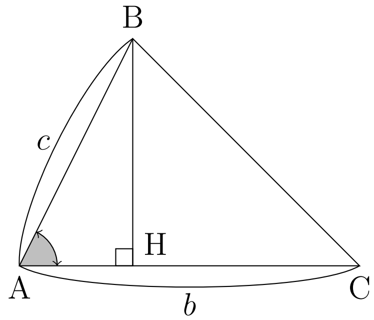
ことが「拡張」であることを確認する.

鈍角に対する三角比を求める練習をした後,「符号」「補角の公式」「余角の公式」について, 座標を用いて確認していく（図を描けば直ぐに分かることを強調しながら）.

また, 相互関係については, はじめに取り上げた斜辺が 1 の直角三角形をベースに導いていく. このタイミングでの計算練習は軽めにして, 今後の応用問題で使わせるようにした.

4 拡充編

教科書では正弦定理→余弦定理→面積公式の順で進むが, まず面積公式から扱った. それは, 面積公式が簡単であり導入しやすいのと, ストーリー性を持たせるためである.



$$S = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BH} = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\sin A = \frac{1}{2}bc\sin A$$

この段階では (余弦定理を未習なので), 簡単な三角形の面積や正多角形の面積を求めさせる. それに関連して, 有名な東大の入試問題「$\pi > 3.05$ が成り立つことを証明せよ」を扱った.

半径 1 の円に内接する正 24 角形の面積を考える. 中心角が 15° の扇形 24 個分として,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 15^\circ \cdot 24 \\ &= 12\cdot\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 3(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

と表される. ここで,

$$2.44 < \sqrt{6} < 2.45\ ,\ 1.41 < \sqrt{2} < 1.42$$

の2式から

$$1.02 < \sqrt{6} - \sqrt{2} < 1.04$$

を導き（不等式の扱いについて復習ができる），

$$\pi > S = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}\,) > 3 \cdot 1.02 > 3.05$$

を得ることができる（$\sin 15^\circ$ の伏線回収）．

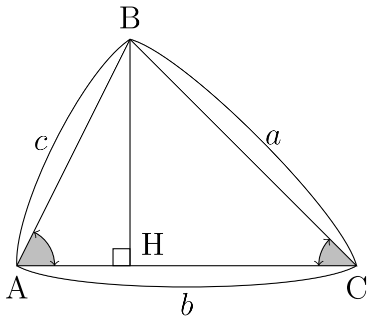
次に正弦定理だが, 面積公式

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$$

の辺々を $\sin A \sin B$ 等で割ることによって

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}\ ,\ \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

を導くことができる．これは, 例の図において,

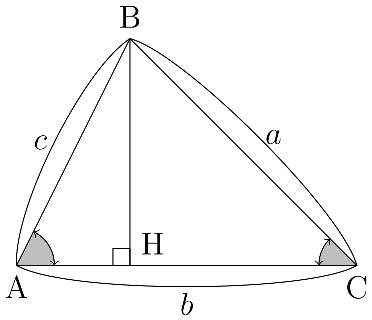


$$\mathrm{BH} = a\sin C = c\sin A$$

経由で考えるのと同じである．

なお, 外接円の半径 R との関係については, 別途, 教科書通りに扱うことになるので, 二度手間なのかもしれない．

余弦定理については, 例の図をベースに, まず第1余弦定理を導出し,



$$\begin{aligned} a &= b\cos C + c\cos B \\ b &= c\cos A + a\cos C \\ c &= a\cos B + b\cos A \end{aligned}$$

これらの式を組み合わせて, 第2余弦定理

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{aligned}$$

を導いている．

この段階までくると, $\sin, \cos$ の値を使う必然性が出てくるので, 問題を解く過程で単位円をその都度書きながら, その値を求めさせるようにした．

5　応用編

公式を使いながら覚えさせるために, まず「形状決定」の問題を扱った（公式を文字のままで代入するため）．次の問いは, 生徒が苦戦したものである（余弦定理で頑張ろうとするから）．

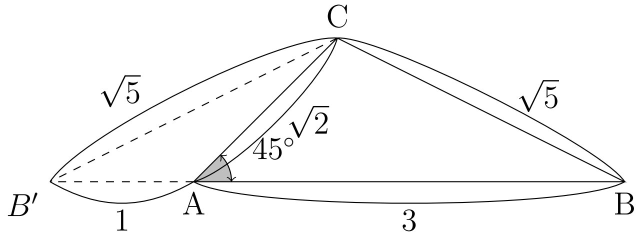
問　$(b-c)\cos^2 A = b\cos^2 B - c\cos^2 C$ が成り立つとき, $\triangle$ABC はどんな形の三角形か．

続いて,「三角形の決定」を扱った．三角形の決定条件を満たさない場合には, 値の候補が複数出る場合がある．辺の長さの候補が2つ出たが, 片方が負の数の場合は楽である．その場合において, 以下の補足を入れた．

問　$\triangle$ABC において, $a = \sqrt{5}, b = \sqrt{2}, A = 45^\circ$ のとき, c を求めよ．

$$(\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2})^2 + c^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot c \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

を整理すると, $c^2 - 2c - 3 = 0$．これを解いて, $c = 3, -1$ となるが, $c > 0$ より $c = 3$ を得る．生徒には, $c = -1$ の意味を考えさせた．次の図における B' に対応している．



最後に面積に戻る. 3 辺の長さが既知の場合は,

- 「$\cos \to \sin \to S$」という流れ
- その流れを公式化した「ヘロンの公式」

の何れかを利用することになる. 前者については, どの角について cos の値を求めるかで, その後の計算量に差が出ることがある. その注意喚起のために, 次の問いを扱った.

問　3 辺の長さが $a = 6, b = 5, c = 7$ である △ABC の面積 S を求めよ.

$$\cos A = \frac{19}{35}\ ,\ \cos B = \frac{5}{7}\ ,\ \cos C = \frac{1}{5}$$

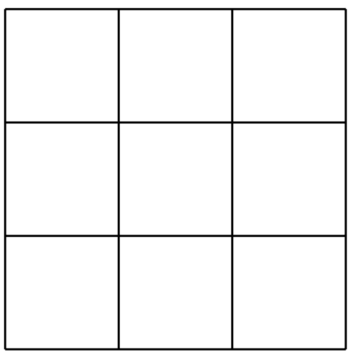
であり, 明らかに $\cos A$ 経由は計算が煩雑となるが, 生徒にその理由を考えさせた. 併せて, 相互関係を用いる際の

$$\begin{aligned} \sin A &= \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{19}{35}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{35^2 - 19^2}{35^2}} = \sqrt{\frac{54 \cdot 16}{35^2}} = \frac{12\sqrt{6}}{35} \end{aligned}$$

といった, 計算の工夫も紹介した.
また, 次の問いは 3 辺の長さが全て無理数であるが, 面積は有理数となる例である.

問　3 辺の長さが $a = \sqrt{10}, b = \sqrt{13}, c = \sqrt{5}$ である △ABC の面積 S を求めよ.

ヘロンの公式を使わずに, 「$\cos \to \sin \to S$」という流れの練習をさせたいのであれば, 出題者側にこのような工夫が求められると思う（辺の長さが全て整数値なら, 普通はヘロンでしょう）.
生徒には面積を求めさせた後で, 面積がきれいな値になる理由を考えさせた. ノーヒントだと厳しいので, 途中で次の図をヒントに与えた.



最後に空間図形を扱ったが, これについては [2] で触れている部分があるので, そちらを見ていただきたい.

6　終わりに

今年度の指導では,

- 単元の指導にストーリー性を持たせる
- 全体像を早めに見せる
- 既習の内容を振り返る場面を作る

ことを意識的に行った.
札幌南高校に赴任して 8 年になるが, 多くの単元で教科書通りの配列ではなく, 再構成をして授業を行うようになった. 項目間の繋がりや扱う順序を意識することについて, 同じ学年を担当した先輩の先生方から多くのことを学んだ. そのことは, 筆者にとって非常に勉強になった.
また, 繋がりを意識することで時間に余裕が生まれ, $+\alpha$ の内容も盛り込めるようになった. このことは, 授業でいろいろと「アソビたい」筆者にとっては好都合である.
次年度から新学習指導要領に沿ったカリキュラムがスタートするが, 今後も指導内容の再構成を進めていきたい.

参考文献等

[1] 長尾良平「場合の数で One more thing」
第 118 回数学教育実践研究会レポート

[2] 長尾良平「図形分野で One more thing」
第 98 回数学教育実践研究会レポート

[3] 中村文則先生のレポート（多数）
http://izumi-math.jp/F_Nakamura/F_Nakamura.html

[4] 「要点と演習　数学 I（三訂版）」数研出版

[5] 怜悧玲瓏～高校数学を天空から俯瞰する～
http://blog.livedoor.jp/ddrerizayoi/

[6] 私的数学塾
http://shochandas.xsrv.jp