第119回数学教育実践研究会　レポート発表

いろんな極限でOne more thing 2

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和3年11月27日　Online 数実研

1　はじめに

筆者は, 以前 [1] において, 軽く済まされがちな極限についての実践を幾つか紹介した．昨年度, 数学Ⅲを持つ機会があり, 幾つかネタができたので第2弾として紹介していきたい.

2　入試問題から

入試問題を過去問演習で扱うことがあるが, 無限級数で面白いと思ったものを2つ紹介したい.

バーゼル問題

(1) 等式 $\dfrac{1}{n^2-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{n-\frac{1}{2}} - \dfrac{1}{n+\frac{1}{2}}$ を利用して, 無限級数の和 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$ を求めよ.

(2) 不等式 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{5}{3}$ を示せ.

長岡科学技術大学の問題である．前半は, お馴染みの部分分数分解を利用して部分和を求め,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{k+\frac{1}{2}}\right) = \frac{2}{3}$$

を得る．後半は,

$$n^2 > n^2 - \frac{1}{4} \text{ より}, \ \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}} \text{ だから}$$

$$\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} = 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2} < 1 + \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^2-\frac{1}{4}}$$

を得て,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

が分かる．

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \fallingdotseq 1.645$ であることはよく知られている．本問では, 無限級数の値を上から評価しているが, **簡単な等式に基づく割には良い評価**だと思った.

ライプニッツ級数

0以上の整数 n に対して,

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\,dx\ ,\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \quad (n \geqq 1)$$

とおく.

(1) I_0 の値を求めよ.

(2) $I_n + I_{n+2}$ の値を n を用いて表せ.

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (I_{2k} + I_{2k+2})$ の値を求めよ.

(5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ の値を求めよ.

京都産業大学の問題（の抜粋）である．

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$$

であることを大学で学んだが, その解法は

$$1-x^2+x^4-x^6+\ldots=\frac{1}{1+x^2}\quad(|x|<1)$$

の両辺を 0 から 1 の間で積分するものであった．**「項別積分」**や**「アーベルの定理」**の利用ということで, **教養の微積分の 1 つの華**である．

細かい計算は読者に任せるが, 本問では

$$I_n+I_{n+2}=\frac{1}{n+1}\ \text{と}\ I_n \geqq 0\ ({}^{\forall}n \geqq 0)$$

から

$$0 \leqq I_n \leqq \frac{1}{n+1}$$

が導かれ,

$$\lim_{n\to\infty} I_n=0$$

を得る．また,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k(I_{2k}+I_{2k+2}) &= (I_0+I_2)\\ &\quad -(I_2+I_4)\\ &\quad +(I_4+I_6)\\ &\quad -(I_6+I_8)\\ &\quad +\ldots\\ &\quad +(-1)^m(I_{2m}+I_{2m+2})\\ &= I_0+(-1)^m I_{2m+2}\\ &= \frac{\pi}{4}+(-1)^m I_{2m+2}\end{aligned}$$

であり,

$$I_{2k}+I_{2k+2}=\frac{1}{2k+1}$$

を勘案すると,

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$$

を得る．大学生の時に習った解法しか知らなかった筆者には, **新鮮な感じ**がした．

また, 元の問題では $\log 2$ に収束する無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

も併せて出題されており, 演習効果の高い問題だと思った．

3　逆関数の極限

授業終了後に, 生徒から（本質的に次のように要約できる）質問を受けた．

質問の要点

2 つの関数 $f(x), g(x)$ が

- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$
- $\lim_{x\to\infty} g(x)=\infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

を満たすとき,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}=0$$

は成り立ちますか？

和・差・積・商の極限については教科書にもその性質が紹介されている．一方, **逆関数の極限に関する性質や定理については, 筆者は書籍等で目にしたことはない.**

グラフを考えると, 元の関数のグラフと逆関数のグラフとは直線「$y=x$」に関して対称だから, 直感的には正しそうな気もする．ただ, **無限は怖いので反例があるかもと思ってみたり・・・.**

$\varepsilon-\delta$ 論法を用いて考察してみたが, 上手くいかない．そこで, 証明を易しくするために, 条件をきつくすることを考え,「単調性」「連続性」「微分可能性」を仮定してみたが, やはり上手くいかない．

そこで, 数実研メーリングリスト「IZUMI」に投稿してみたところ, 会員の安田先生から返答をいただいた．

結論としては,

$$f(x)=e^{2x}\ ,\ g(x)=e^{x}$$

を考えると, 3 つの仮定をすべて満たすが,

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\log x\ ,\ g^{-1}(x)=\log x\ \text{より}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)}=\frac{1}{2}$$

となり, 生徒の質問にある結論は**成り立たない**ことが分かる.

もともとの生徒の質問は, 次のものであった.

もともとの質問

$f(x) = \log x$, $g(x) = \sqrt{x}$ とする.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \quad \cdots ①$$

を調べる代わりに,

$$f^{-1}(x) = e^x \ , \ g^{-1}(x) = x^2$$

を使い,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f^{-1}(x)}{g^{-1}(x)} = \infty \quad \cdots ②$$

ということから, 元の極限が 0 と結論づけられますか？

質問した生徒は,「$\log x$ の増加が異様に遅いこと」はもちろん承知の上で,「① を考察するのに e^x が関係する ② の方が調べやすいなあ」と思って質問してきた.

今回の命題は反例があり「偽」という結論になったが, さらに条件を加味すると「真」になったりするのだろうか？

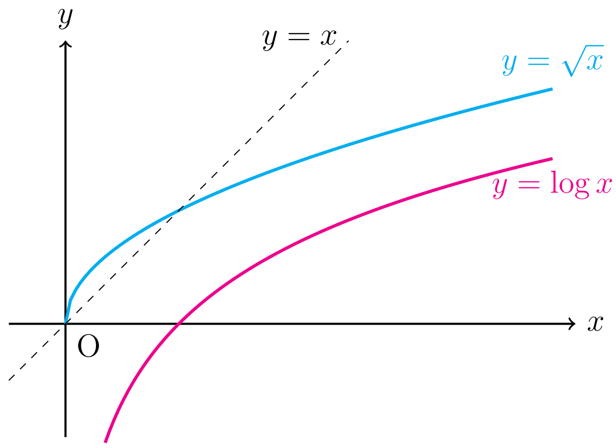


図 1: $y = \sqrt{x}$ と $y = \log x$ のグラフ

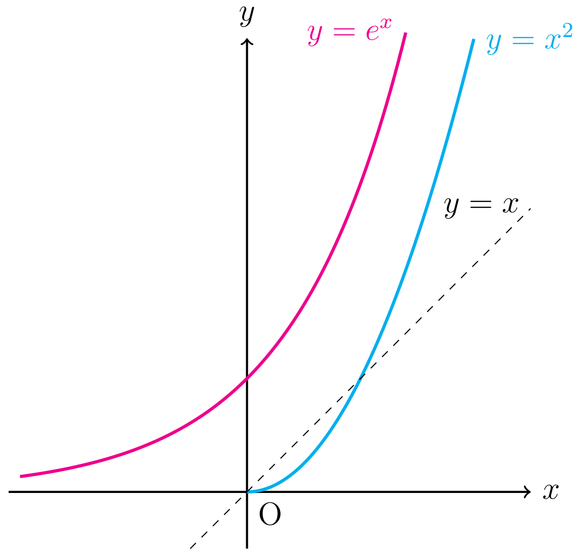
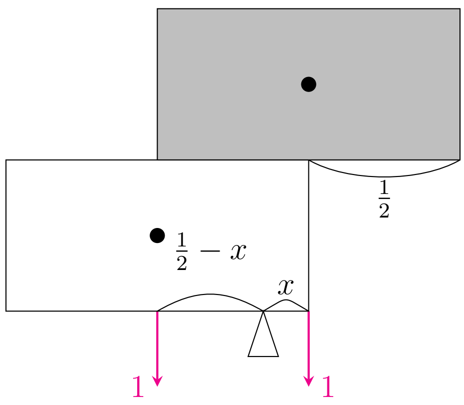


図 2: $y = x^2$ $(x \geqq 0)$ と $y = e^x$ のグラフ

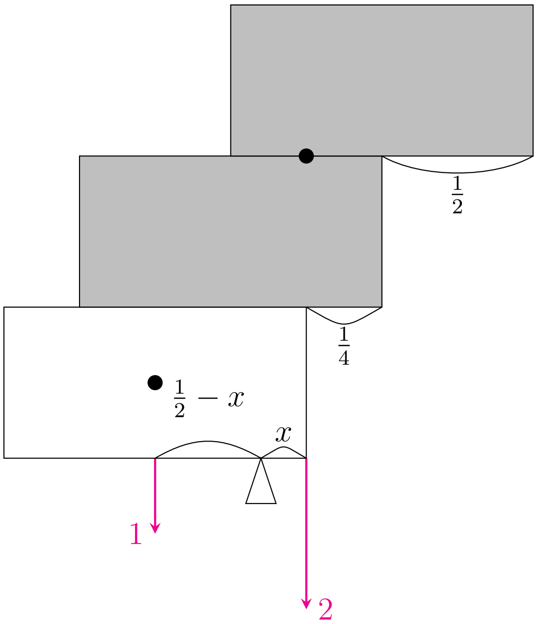
4 調和級数とバランス

調和級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cdots ③$ は正の無限大に発散する. このことは別の級数と比較したり, 定積分 $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx$ の結果を利用したりして証明することができる.

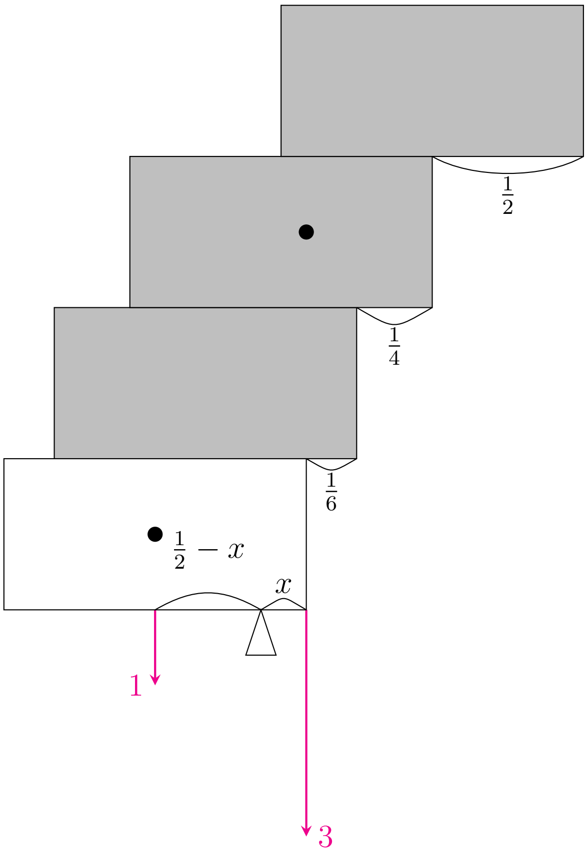
正の無限大に発散するということは, 言い換えると, ③ の部分和は**いくらでも大きい値をとることができる**ことになる. [4] では, 積み木を題材にこの級数を扱っている. 物理でモーメントを学び終えていたので, 実際に積み木 1 つ分ずらすことを目標に授業を行ってみた.



$$1 \times \left(\frac{1}{2} - x\right) = 1 \times x \text{ より}, \ x = \frac{1}{4}$$



$$1 \times \left(\frac{1}{2} - x\right) = 2 \times x \text{ より}, \ x = \frac{1}{6}$$



$$1 \times \left(\frac{1}{2} - x\right) = 3 \times x \text{ より}, \ x = \frac{1}{8}$$

ここまでの計算により,

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{25}{24} > 1$$

となるので, 下から順にずらして積んでいけば理論的には 1 つ分ずらせることになる.

実際に挑戦してみたのが次の写真である. 数学科準備室にあった同じサイズの本を積んでみた. **上手くやるコツは, (気持ち) 薄めの本を上の方に積むことである (笑).**

図 3: 何とかぎりぎり・・・

5 終わりに

逆関数の極限に関するやりとりの中で, 安田先生は「お風呂に入っていて, 思い浮かびました (体重重いので浮かんだ？)」とのこと. 安田先生は以前にも第 71 回数実研のレポート「難しい問題に仕上げる」において, 「Max(a, b) を絶対値を用いて表せることが実は小学生レベルの問題であることに, 入浴中に気づいた」との記述をされている.

「入浴というのは, 人を解放させるものだ」ということが改めて分かった今日この頃である.

参考文献等

[1] 長尾良平「いろんな極限で One more thing」第 104 回数学教育実践研究会レポート

[2] 田島一郎「解析入門」岩波書店

[3] 「逆関数の極限について」数実研メーリングリスト IZUMI

[4] 西山豊「積み木と調和級数」 http://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/math2010j/buildingblocks_j.pdf