第118回数学教育実践研究会　レポート発表

場合の数でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和3年8月28日　Online 数実研

1　はじめに

「場合の数」の単元は, 素朴な「書き出し」による数え上げから始まる. その後, 「積の法則」を軸として「順列」や「組合せ」の概念が導入され, 計算による数え上げに落ち着いていく.

本稿では, 筆者がこの単元の指導で少し工夫をした次の項目について紹介していきたい.

- 柱となる問いの設定
- 書き込み方式（道順）
- 整数の約数の個数

2　柱となる問いの設定

3年前にこの単元の指導を終えた後, 傍用問題集 [1] 及び参考書 [2] に載っているある問題が気になった.

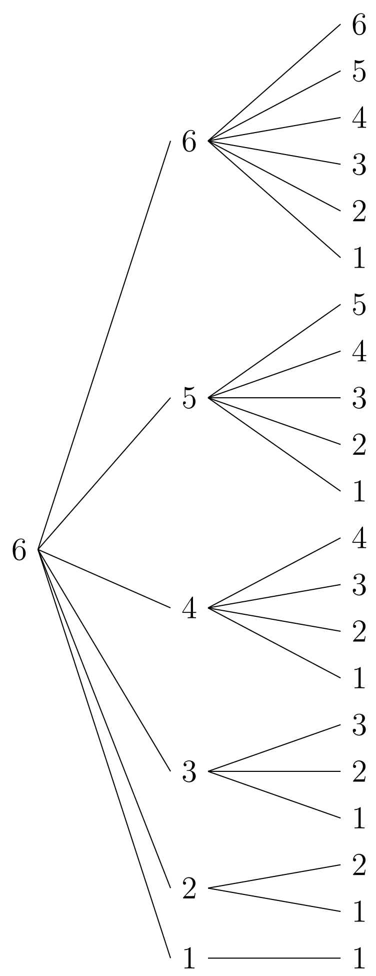
着目した問題（の改題）

> 1個のさいころを3回投げて, 出た目の数を順に A, B, C とする. $A \geqq B \geqq C$ となるのは何通りか？

この単元については, **「1話読み切り」的な授業**になりがちである. 着目した問題は, （問題集においては）重複組合せの問題としての扱いだが, 複数の解法が可能である.

そこで, **この問題を何度か扱うことによって, この単元の指導における柱の1つになる**のではないかと考えた.

- 樹形図による解法
  ☜ 左から順に A, B, C
  ☜ 積の法則が使えないタイプ
  ☜ 100通り以下なら完成させたい



A が5以下のときも同様に樹形図を書いて,

$$21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56 \text{通り}.$$

- 組合せによる解法
  ☜ 場合分けをして計算で処理できるタイプ
  ☜ 計算しやすいように分けさせたい

  (1) $A = B = C$ のとき, 6 通り.
  (2) $A > B > C$ のとき, ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通り.
  (3) $A > B = C$ のとき, ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り.
  (4) $A = B > C$ のとき, ${}_6\mathrm{C}_2 = 15$ 通り.

  の 4 通りに分けて考え, 計 56 通り.

- 重複組合せによる解法
  ☜ ◯：3 個と｜：5 本を並べる場合に帰着
  ${}_8\mathrm{C}_3 = 56$ 通り.

最初は書き出すしかなかったものが, 少し工夫すると計算で処理できるようになり, 最終的には 1 つの式で処理できるようになる. 重複組合せで扱った際には、「すごい！」との声が上がった.

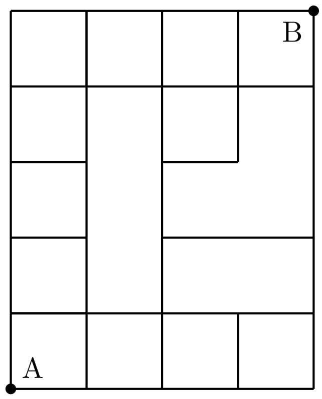
3　書き込み方式（道順）

「同じものを含む順列」の応用例として, 道順の総数を求める問題がある. 基本的な考え方を紹介した後,「定点通過」「通行止め回避」といった定番問題を扱う.

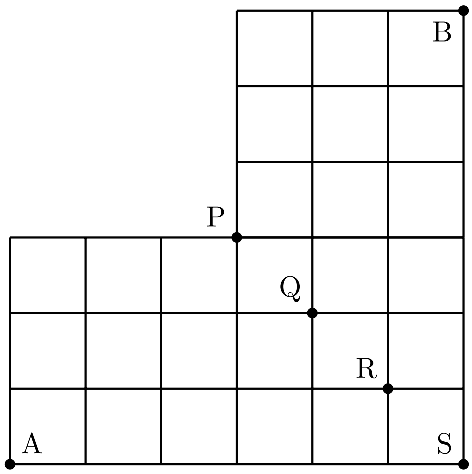
その際, 地図の形状や付帯条件が複雑な場合には, 計算よりも所謂**「書き込み方式」**の方が速くて確実なことも多いので, そちらについて必ず触れるようにしている.

問 1　次の地図において, A から B まで遠回りせずに移動する道順の総数を求めよ.

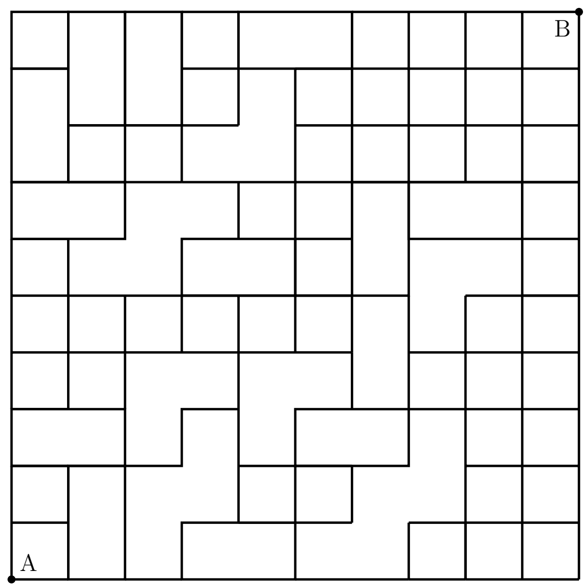
(1)



(2)



(3)



教科書の問題を扱った後で, 「書き込み方式」の手順について説明を行い, (1)(2) が印刷されたプリントを配布して宿題とした.

(2) は「書き込み方式」で処理できるが, P, Q, R, S の何れかを必ず通ることから, 場合分けすることによって, 計算でも処理ができる.

(3) は翌日の授業の冒頭で配布した「(1)(2) の解答例」の裏に印刷してあり, 生徒は「ラスボスだ〜」と興奮気味である. 「実力テストの問題にとっておけばよかったなぁ」という話をすると, 「これで 20 点もらえるんですか？」「でも, 部分点は一切ないから 0 点か 20 点だよ」「ざわざわ・・・」というやりとりが発生する.

4　整数の約数の個数

生徒が理解するまでに, 意外と時間がかかる内容である. 例えば, 12 の正の約数であれば,

$$1, 2, 3, 4, 6, 12$$

であるが, これを

$$1\cdot 1\ ,\ 2\cdot 1\ ,\ 1\cdot 3\ ,\ 2^2\cdot 1\ ,\ 2\cdot 3\ ,\ 2^2\cdot 3$$

のように, **素因数の積として把握する場面は無かった**と思う. このことを教科書にあるように

×	1	3
1	1	3
2	2	6
2^2	4	12

と表にまとめても, 生徒はしっくりきていない印象を受ける.

そこで, 倍数・約数の定義の復習を行った上で,

「n が m の約数であるとき, $\dfrac{m}{n}$ は整数となる」

ことを切り口にして, 授業を進めた.

問 2　次の個数をそれぞれ求めよ.

(1) 16 の正の約数.

(2) 12 の正の約数.

(3) 360 の正の約数.

(1) は $1, 2, 4, 8, 16$ の 5 個であるが, 「何故それ以外に無いのか？」という問いにうまく答えられない生徒もいる. そこで, (1) は $16 = 2^4$ であることから,

$$\frac{2^4}{\boxed{\ n\ }} \in \mathbb{Z}$$

をイメージさせ,

「n に 3 や 5 を入れるのはセンス無いよね！」

と言いながら, n に適するのは $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4$ の 5 個しかないことを確認する. そして, 素因数分解した際に**素因数が 1 個からなる整数については, 約数がすぐ分かる**ことを実感させた.

同様に, (2) は $12 = 2^2\cdot 3$ であることから

$$\frac{12}{\boxed{\ n\ }} = \frac{2^2}{\boxed{\ A\ }} \times \frac{3}{\boxed{\ B\ }} \in \mathbb{Z}$$

をイメージさせる.

「A には 1 , 2 , 2^2 , B には 1 , 3」

が適しており,「A で $1, 2, 2^2$ の 3 通り」のどの場合にも,「B では $1, 3$ の 2 通り」が考えられるため, 積の法則より正の約数は $2\cdot 3 = 6$ 個となる.

この説明の後で, 前述の表の形でまとめた方が理解度は高い印象を受ける.

(3) も同様であるが, 前述の表の形では素因数の個数が 2 個までの場合しか説明ができないので, 今回紹介している表現が有利ではないかと考えている.

$$\frac{360}{\boxed{\ n\ }} = \frac{2^3}{\boxed{\ A\ }} \times \frac{3^2}{\boxed{\ B\ }} \times \frac{5}{\boxed{\ C\ }} \in \mathbb{Z}$$

- A には $1, 2, 2^2, 2^3$ の 4 通り
- B には $1, 3, 3^2$ の 3 通り
- C には $1, 5$ の 2 通り

したがって, 積の法則から $4\cdot 3\cdot 2 = 24$ 通り.

5　終わりに

まず,「柱となる問いを設定」したことについては,

- 色々な解法を紹介しながら
- 話に連続性を持たせる

ためであったが, 生徒の反応から判断すると設定して良かったと思っている. 先に,「数え上げ」「場合分け」による解法を扱っていたので,「重複組合せ」による解法の巧さが際立ったのだろう.

次に,「書き込み方式（道順）」については,

- 手作業の大切さ

- 正確な作業の大切さ

を意識した取り組みである. (3) が主たる目標であるが, **「問題を見たときに『面白がってくれる』生徒達に助けられているなぁ」**と感じる今日この頃である. あるクラスでは, 筆者が解答例を配布するより先に, 「(生徒による) 解答例」が教室の小黒板に掲示されていた.

また, 「整数の約数の個数」については,

- 「約数」の復習
- 「新しい視点」の提供

になるかと思う. ここでは敢えて扱わずに, 「整数の性質」の単元で扱うというのも (数学 A の 3 分野全てを履修するのであれば) ありかもしれない.

この単元においては, 上手い解法・スマートな解法を選び, 実行できることも大切だが, **自分なりに思考を巡らせて正答に到達する**ことも同じくらい大切である. そういう経験を通して, **思考の幅が広がる**のだろう. それを可能にするためには,

- 具体的に書き出す
- 問題や条件の図示
- 和の法則
  ☜ 場合分け
- 積の法則
  ☜ 順列・組合せ
- 重複度の考察
  ☜ 円順列・数珠順列・組合せ・組分け・同じものを含む順列
- 数えやすい対象との対応
  ☜ 道順・重複組合せ

といった**「基本事項の習熟」**が欠かせない. また, 最終的に計算で処理するにしても, **「頭の中で樹形図等の具体的なイメージがもてる」**ことが大事だと思う.

さらに, 生徒が問題に取り組む際に**「どの事項との関連が強いのか」自然と意識できる**ようになれば, 実力アップが見込める. **「解法パターンの暗記」よりも, 「基本事項へ立ち返る習慣」の方が有用**だろう. 教員は, その方向へ生徒を導いていくことが求められる. そのためには, 授業において

- 絵を描いて状況を説明しながら
- 思考過程を見せていく

ことが必須である.

最後に, 筆者が教科書を読んで疑問に思うのは,

- 重複順列を積の法則の直後で扱わない
- ${}_n\mathrm{P}_r$ の定義の際に「異なる」を強調しない

ことである.

前者については, 新課程での教科書 15 冊を見てみたが, 重複順列は全て「${}_n\mathrm{P}_r$ の後」である. 先に重複順列から扱ってもいいのではないだろうか. そう考えて, 今年度は, 積の法則の直後で扱ってみた (重複順列という名前は後から紹介).

後者についてだが, 教科書は「用語」「公式」は**太字**にするが, 「大事な条件」は**太字**にはしていない. 「教員が授業においてしっかりフォローしてね」ということなのであろうか？

参考文献等

[1] 「改訂版 教科書傍用 4STEP 数学 I+A」 数研出版

[2] 安田亨「ハッとめざめる確率」 東京出版