第117回数学教育実践研究会　レポート発表

複素数平面でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和3年6月5日　Online 数実研

1　はじめに

複素数平面の単元において, 主要な内容の1つに「ド・モアブルの定理」がある. その応用として, 与えられた複素数の n 乗根を求める問題がある. 特に1の n 乗根（$n \geqq 3$）については, 「単位円に内接する正 n 角形の頂点に対応」するという幾何学的な側面がある.

本レポートでは, 正多角形の作図についての実践を紹介していきたい

2　数学A・IIでの事前の仕込み

作図については, 数学Aの「図形の性質」の単元で扱うことになっており, 正5角形の作図についての筆者の実践を [1] で触れている.

その実践の際には, ガウスが数学者を目指すことになった逸話[1]も紹介し, 「定規とコンパスによる作図で実現可能な長さ」は, 「一次または二次の方程式を繰り返し解いて表せる数に対応する長さ」であることを紹介してある.

ド・モアブルの定理の応用として, 1の n 乗根

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

を求めることができる. その結果を図形的に解釈すると, z_k は複素数平面上の単位円に内接する正 n 角形の頂点と対応していることが分かる. したがって,

$$\cos\frac{2\pi}{n} \text{ または } \sin\frac{2\pi}{n}$$

が作図できる長さであれば, 正 n 角形は作図できることになる.

高次方程式の指導の際に, 複素数平面についても触れており, 「方程式 $z^3 = 1, z^4 = 1$ の解」と「単位円に内接する正三角形・正四角形の頂点との対応」については紹介済みである.

3　数学IIIでの指導

複素数平面での実践は, 2コマ連続の日が毎週あるので, そこで集中的に行うことにした. 当日は, **「今日は次の道具しか使いません！」**と宣言した上で, 授業を行った.

- 複素数の各種計算
- 2次方程式の解の公式
- 解と係数の関係

例1　正3角形

求める正3角形の頂点に対応する複素数は, 方程式 $z^3 = 1$ の解として求められる.

$$(z-1)(z^2+z+1) = 0$$

と因数分解され, 1以外の解を考えるので $z \neq 1$ として

$$z^2 + z + 1 = 0 \cdots ①$$

を解けば良いことになる. この方程式自体は, 解の公式を用いて

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

[1] ある朝目覚めた際に「正17角形の作図可能性に気づいた」ことが, 数学者を目指す決め手になった

とすぐ解くことができるが, 解かなくても作図はできる.

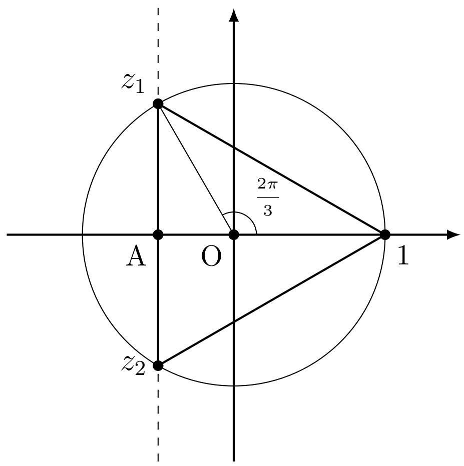

図 1: 正 3 角形の作図

点 A の座標が分かれば, A を通り x 軸に垂直な直線と単位円との交点 z_1 が分かるからである. z_1, z_2 は①の解なので, 解と係数の関係より

$$z_1 + z_2 = -1$$

である. $\overline{z_1} = z_2$ より $z_1 + z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1)$ だから, A の x 座標（つまり実部）は

$$\mathrm{Re}(z_1) = -\frac{1}{2}\left(= \cos\frac{2\pi}{3}\right)$$

となる. z_1, z_2 が複素共役であることを利用して, 2 次方程式を解いていないことに注目したい.

例 2　正 5 角形

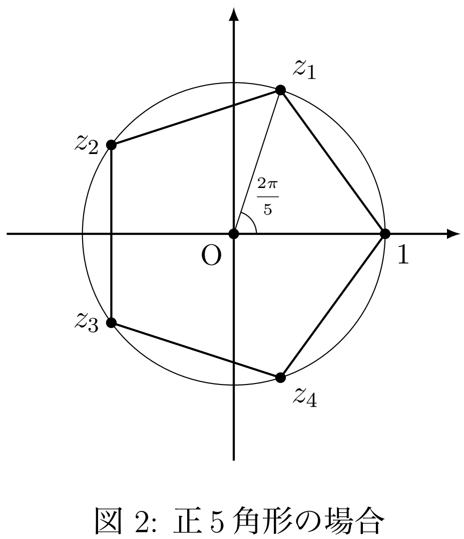

図 2: 正 5 角形の場合

求める正 5 角形の頂点に対応する複素数は, 方程式 $z^5 = 1$ の解として求められる.

$$(z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

と因数分解され, 1 以外の解を考えるので $z \neq 1$ として

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0 \cdots ②$$

を解けば良いことになる. ②の解を z_1, z_2, z_3, z_4 とする. $\mathrm{Re}(z_1)$ を求める方法は, 複数考えられる.

$\boxed{\text{解 1}}$　相反方程式として解く. $z = 0$ は解でないので, ②の両辺を z^2 で割り,

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0$$

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

$$z + \frac{1}{z} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdots ③$$

③の解の 1 つが z_1 であり, $|z_1|^2 = 1$ だから,

$$z_1 + \frac{1}{z_1} = z_1 + \overline{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1) > 0$$

したがって,

$$2\mathrm{Re}(z_1) = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

となるので,

$$\mathrm{Re}(z_1) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}\left(= \cos\frac{2\pi}{5}\right)$$

となる.

なお, ③の分母を払って整理した方程式を解いていくと,（z_1 は実部・虚部ともに正なことを勘案して）最終的に

$$z_1 = \frac{\sqrt{5} - 1 + \sqrt{10 + 2\sqrt{5}}\,i}{4}$$

となる.

$\boxed{\text{解 2}}$　まず, 解と係数の関係より,

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1 \cdots ④$$

$$z_1z_2z_3z_4 = 1 \cdots ⑤$$

である.

次に, 例 1 で複素共役が有効だったことを意識して, 4 つの解を 2 つずつの 2 組に分ける. そして, $\alpha_1 = z_1 + z_4, \alpha_2 = z_2 + z_3$ とおく.

そのとき, $z_k z_l = z_1^k z_1^l = z_1^{k+l} = z_{k+l}$ に注意して計算すると（$z_1^5 = 1$ だから, mod 5 で考える）

$$\begin{aligned}\alpha_1 + \alpha_2 &= (z_1 + z_4) + (z_2 + z_3)\\ &= z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1\alpha_2 &= (z_1 + z_4)(z_2 + z_3)\\ &= z_1z_2 + z_1z_3 + z_4z_2 + z_4z_3\\ &= z_3 + z_4 + z_1 + z_2 = -1\end{aligned}$$

と計算され, α_1, α_2 は 2 次方程式

$$t^2 + t - 1 = 0$$

の解となるので,

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

である.

$$\alpha_1 = z_1 + z_4 = z_1 + \overline{z_1} = 2\mathrm{Re}(z_1)$$

であり, α_1, α_2 の定義から $\alpha_1 > \alpha_2$ なので

$$\mathrm{Re}(z_1) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

となる. 実際の作図方法は, 次の図を見ていただきたい.

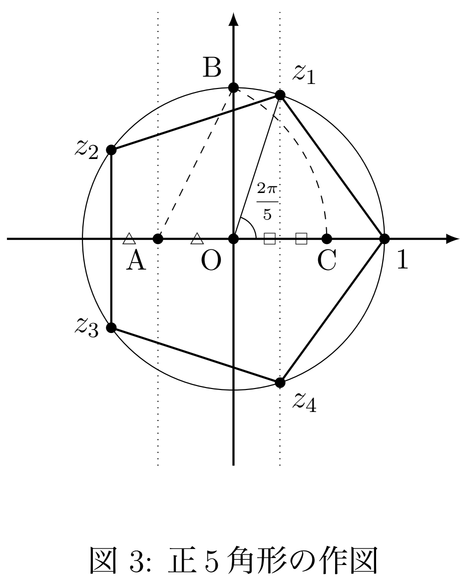

図 3: 正 5 角形の作図

例 3　正 17 角形

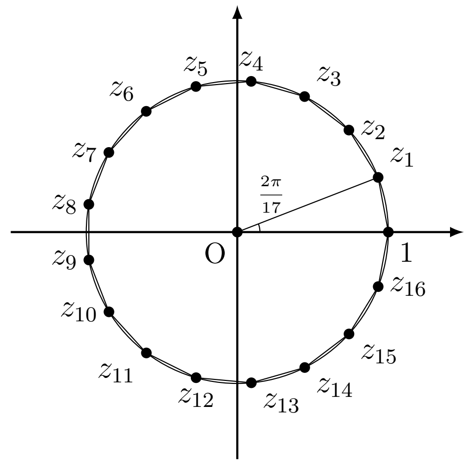

図 4: 正 17 角形の場合

求める正 17 角形の頂点に対応する複素数は, 方程式 $z^{17} = 1$ の解として求められる.

$$(z-1)(z^{16} + z^{15} + \ldots + z^2 + z + 1) = 0$$

と因数分解され, 1 以外の解を考えるので $z \neq 1$ として

$$z^{16} + z^{15} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0 \cdots ⑥$$

を解けば良いことになる. ⑥の解を $z_1, z_2, \ldots, z_{16}$ とする. まず, 解と係数の関係より,

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_{15} + z_{16} = -1 \cdots ⑦$$

$$z_1z_2 \cdots z_{15}z_{16} = 1 \cdots ⑧$$

次に, $z_1, z_2, \ldots, z_{15}, z_{16}$ を 8 つずつの 2 組に分け（分け方の理由については後述）,

$$\alpha_1 = z_1 + z_2 + z_4 + z_8 + z_9 + z_{13} + z_{15} + z_{16}$$
$$\alpha_2 = z_3 + z_5 + z_6 + z_7 + z_{10} + z_{11} + z_{12} + z_{14}$$

とおく. そのとき,

$$\alpha_1 + \alpha_2 = z_1 + \ldots + z_{16} = -1 \cdots ⑨$$

$$\alpha_1\alpha_2 = 4(z_1 + \ldots + z_{16}) = -4 \cdots ⑩$$

が成り立つ. ⑩については, $z_1, \ldots, z_{16}$ の乗積表を作ると分かる（mod 17 で考える）.

	1	2	4	8	9	13	15	16
3	4	5	7	11	12	16	1	2
5	6	7	9	13	14	1	3	4
6	7	8	10	14	15	2	4	5
7	8	9	11	15	16	3	5	6
10	11	12	14	1	2	6	8	9
11	12	13	15	2	3	7	9	10
12	13	14	16	3	4	8	10	11
14	15	16	1	5	6	10	12	13

※1〜16 が全て 4 回ずつ現れていることを確認

したがって, α_1, α_2 は 2 次方程式

$$t^2 + t - 4 = 0$$

の解となる.

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= z_1 + z_2 + z_4 + z_8 + z_9 + z_{13} + z_{15} + z_{16} \\
&= z_1 + z_2 + z_4 + z_8 + \overline{z_8} + \overline{z_4} + \overline{z_2} + \overline{z_1} \\
&= 2\left(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_2) + \mathrm{Re}(z_4) + \mathrm{Re}(z_8)\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17}\right) \\
&> 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{17}\right) \\
&> 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) > 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって,

$$\alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \cdots ⑪$$

$$\alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \cdots ⑫$$

次に, α_1, α_2 に属する z_k を 4 つずつの 2 組に分け,

$$\beta_1 = z_1 + z_4 + z_{13} + z_{16}$$

$$\beta_2 = z_3 + z_5 + z_{12} + z_{14}$$

$$\beta_3 = z_2 + z_8 + z_9 + z_{15}$$

$$\beta_4 = z_6 + z_7 + z_{10} + z_{11}$$

とおく. そのとき,

$$\beta_1 + \beta_3 = \alpha_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \cdots ⑬$$

$$\beta_2 + \beta_4 = \alpha_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \cdots ⑭$$

であることは直ぐに分かる. 次に,

$$\beta_1\beta_3 = \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \cdots ⑮$$

$$\beta_2\beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2 = -1 \cdots ⑯$$

が成り立つことが分かる. こちらについても, 乗積表を作ると確認できる.

	1	4	13	16
2	3	6	15	1
8	9	12	4	7
9	10	13	5	8
15	16	2	11	14

	3	5	12	14
6	9	11	1	3
7	10	12	2	4
10	13	15	5	7
11	14	16	6	8

⑬と⑮より, β_1, β_3 は 2 次方程式

$$t^2 - \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}t - 1 = 0$$

の解となる. これを解くと,

$$t = \frac{-1 + \sqrt{17} \pm \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4}$$

となる.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= z_1 + z_4 + z_{13} + z_{16} \\
&= z_1 + z_4 + \overline{z_4} + \overline{z_1} \\
&= 2\left(\mathrm{Re}(z_1) + \mathrm{Re}(z_4)\right) \\
&= 2\left(\cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17}\right) > 0
\end{aligned}$$

が成り立つ. したがって,

$$\beta_1 = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \cdots ⑰$$

$$\beta_3 = \frac{-1 + \sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{4} \cdots ⑱$$

β_2, β_4 についても同様の計算・考察を行い,

$$\beta_2 = \frac{-1 - \sqrt{17} + \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \cdots ⑲$$

$$\beta_4 = \frac{-1 - \sqrt{17} - \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}{4} \cdots ⑳$$

を得る.

さらに, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ に属する z_k を2つずつの8組に分け,

$$\gamma_1 = z_1 + z_{16} \qquad \gamma_2 = z_3 + z_{14}$$
$$\gamma_3 = z_8 + z_9 \qquad \gamma_4 = z_7 + z_{10}$$
$$\gamma_5 = z_4 + z_{13} \qquad \gamma_6 = z_5 + z_{12}$$
$$\gamma_7 = z_2 + z_{15} \qquad \gamma_8 = z_6 + z_{11}$$

とおく. そのとき,

$$\gamma_1 + \gamma_5 = \beta_1$$

$$\begin{aligned}\gamma_1\gamma_5 &= (z_1 + z_{16})(z_4 + z_{13})\\ &= z_5 + z_{14} + z_3 + z_{12} = \beta_2\end{aligned}$$

となるので, γ_1, γ_5 は2次方程式

$$t^2 - \beta_1 t + \beta_2 = 0$$

の解となる. この2次方程式を解き, $\gamma_1 > \gamma_5$ に注意すると, ついに

$$\mathrm{Re}(z_1) = \frac{1}{2}\gamma_1 \left(= \cos\frac{2\pi}{17}\right)$$

の値として,

$$\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}}{16} + \frac{\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{8}$$

を得ることができる（スペースに収める関係で, 後半の根号内は式変形を追加して行ってある）.

この値は, 四則演算と開平計算のみで求めることができるため, **正17角形は作図可能**であることが分かる.

4 終わりに

$\mathrm{Re}(z_1) = \cos\dfrac{2\pi}{n}$ を求める過程では, **「ガウスのf項周期」**というアイディアを用いている.

$z_1, z_2, \ldots, z_{15}, z_{16}$ を2つのグループに分けて

$$\alpha_1 = z_1 + z_2 + z_4 + z_8 + z_9 + z_{13} + z_{15} + z_{16}$$
$$\alpha_2 = z_3 + z_5 + z_6 + z_7 + z_{10} + z_{11} + z_{12} + z_{14}$$

と定義しているが, その種明かしをしておこう. 17の原始根として3をとると,

k	0	1	2	3	4	5	6	7
3^k	1	3	9	10	13	5	15	11

k	8	9	10	11	12	13	14	15
3^k	16	14	8	7	4	12	2	6

となるので, 下段の 3^k の並びに対応する z_k を考え, **1つおきに和を取って**いくと,

$$z_1 + z_9 + z_{13} + z_{15} + z_{16} + z_8 + z_4 + z_2 = \alpha_1$$
$$z_3 + z_{10} + z_5 + z_{11} + z_{14} + z_7 + z_{12} + z_6 = \alpha_2$$

となっている. また, **3つおきに和を取って**いくと,

$$z_1 + z_{13} + z_{16} + z_4 = \beta_1$$
$$z_3 + z_5 + z_{14} + z_{12} = \beta_2$$
$$z_9 + z_{15} + z_8 + z_2 = \beta_3$$
$$z_{10} + z_{11} + z_7 + z_6 = \beta_4$$

となっている.

f項周期の理論は**ガロア理論**とも関係しており, その言葉を知ったのは, [2] を読んだ時である.

ガロア理論では,「基礎体 K とその拡大体 L との間の部分体」で「L の K 上の自己同型群（ガロア群）の部分群」で不変なものを考える. 例えば, α_1, α_2 は $\sigma_2(z_k) = z_{3^2k}$ で定義される写像によって不変である. また, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ は $\sigma_4(z_k) = z_{3^4k}$ で定義される写像によって不変である.

ガウスがf項周期の理論を公表したのは, ガロアがこの世に生を受ける前であり, 円分体におけるガロア理論を独自に見つけていたことになる.

参考文献の [3][4][5][6] はガロア理論との関係に触れた内容, [8] は [7] を読んでまとめた内容となっており, これらの文献を読みながら, 筆者も目下勉強中である. また, 実際の作図については, [10] で動画として見ることができる.

作図できる正 n 角形で, n が素数なのはフェルマー素数に限られ, 現段階では

$$n = 3, 5, 17, 257, 65537$$

である. 正257角形, 正65537角形を作図しようという苦闘の跡が, [12][13] で見ることができる. その執念には, ただただ感服するほかない.

実際の授業は, **One more thing 過ぎた**と思うが,

- 授業中に「そこ, 計算間違ってます！」
- 学級日誌で「計算ミスって悔しい！」

との反応があったので, 彼らなりに楽しんでくれたのではないかと思っている.

時間に余裕があれば, $z_1, \ldots, z_{16}$ を α_1, α_2 の 2 組, $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ の 4 組に分ける部分について,「乗積表がきれいな結果になるようにどう分けたらいいか」, 生徒に試行錯誤させたいところである. また, $\alpha_1 > 0$ であることを示すのも, いい演習だと思う.

また, 入試問題においては, 1 の n 乗根に由来するものもしばしば見受けられ, 特に

2017 京都府立大

n を 0 以上の整数とする. $x_n = 2\cos\dfrac{2n}{17}\pi$ とするとき以下の問いに答えよ.

(1) $s = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8$ とするとき, $x_1(s+1) = 2s+2$ となることを示せ.

(2) $t = x_1 + x_2 + x_4 + x_8$ とするとき, $t^2 + t - 4 = 0$ となることを示せ.

(3) $x_1 + x_4$ の値を求めよ.

については, 正 17 角形の作図の話そのものである（$x_1 + x_4$ の値は, β_1 である）. また,

2019 横浜国立大

複素数 $\alpha = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して, 複素数 β, γ を

$$\beta = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4, \gamma = \alpha^3 + \alpha^5 + \alpha^6$$

とする. 次の問いに答えよ.

(1) $\beta + \gamma, \beta\gamma$ の値を求めよ.

(2) β, γ の値を求めよ.

(3) $\sin\dfrac{2\pi}{7} + \sin\dfrac{4\pi}{7} + \sin\dfrac{8\pi}{7}$ および $\sin\dfrac{\pi}{7}\sin\dfrac{2\pi}{7}\sin\dfrac{3\pi}{7}$ の値を求めよ.

については, f 項周期の知識があれば, なぜ β, γ をそのように定義しているかが分かる.

k	0	1	2	3	4	5
$3^k \pmod 7$	1	3	2	6	4	5

生徒に身につけさせたい力を把握しつつ, 受験ではまず問われそうにない（けれども数学的には魅惑的な・・・結果的に生徒を刺激する）内容について, 今後も授業で上手に取り入れていきたいと思う.

参考文献等

[1] 長尾良平「図形分野で One more thing」第 98 回数学教育実践研究会レポート

[2] 西山豊「ガウスの正 17 角形作図法」 `http://yutaka-nishiyama.sakura.ne.jp/index.html`

[3] 上野孝司「響きあうガロアとガウス–正 17 角形の作図問題」`http://hooktail.sub.jp`

[4] 美的数学のすすめ `http://biteki-math.hatenablog.com`

[5] S.G. ギンディキン「ガウスが切り開いた道」丸善出版

[6] 益子雅文「$\cos(\frac{2\pi}{17})$ (ガロアの立場から見たガウスの方法)」学習院高等科紀要

[7] 栗原将人「ガウスの数論世界をゆく」数学書房

[8] 片山喜美「数学メモ」「正 17 角形の作図とガウス周期について」`http://ja9nfo.web.fc2.com`

[9] 高木貞治「初等整数論講義」岩波書店

[10] 辻順平「正十七角形作図 RTA」 `https://www.nicovideo.jp/watch/sm36415821`

[11] 「全国大学入試問題正解　数学」旺文社

[12] Richelot, Friedrich Julius. "De resolutione algebraica aequationis $X^{257} = 1$, sive de divisione circuli per bisectionem anguli septies repetitam in partes 257 inter se aequales commentatio coronata."

[13] Hermes, Johann Gustav. "Ueber die Teilung des Kreises in 65537 gleiche Teile."