第116回数学教育実践研究会　レポート発表

面積・体積でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和3年1月30日　Online 数実研

1　はじめに

定積分の応用として, 面積・体積の求値問題がある. その場面で扱った

- 生徒の印象に残るように工夫したこと
- 生徒の質問を元に考えたこと
- 実験を伴う題材

について, その実践を紹介していきたい.

2　具体物・残像現象の利用

数学IIの積分の単元で面積を扱う際には, 回転体の体積についても軽く触れるようにしている.

導入としては,

教卓の上で胡瓜を薄くスライス
↓
これってすごい薄い円柱だよね
↓
たくさん集めたら元の胡瓜が復元できるね

という流れで, 「微小体積を寄せ集めること」を意識させている.

具体例として, 球の体積を扱っている. 円板を「直径を通る直線の周りに1回転」させたときの通過領域は球になるので, 生徒の近くで実演して

これって球に見えるよね！
↓
(語気を強めて) 見えるよね！！
↓
はい…

というやりとりをしている.

図 1: 印象を押し売り・・・するために

また, 数学IIIで本格的に体積計算を行う際にも, 残像現象を利用している.

グラフが x 軸を横切るタイプ

2曲線 $y = x^2 - x - 6$ と $y = 3x - 1$ で囲まれる部分を, x 軸の周りに1回転してできる立体の体積 V を求めよ.

図 2: 同じように見える・・・はず

2020年度京都大学（理系）大問6

x, y, z を座標とする空間において, xz 平面内の曲線

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸の周りに1回転させるとき, この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする. この S をさらに x 軸の周りに1回転させるとき, S が通過した部分よりなる立体を V とする. このとき, V の体積を求めよ.

[1] でも題材にした問題である. 異なる軸に関して合計2回回転させるため, 難易度は高い.

まず最初に考えるのは,

$$z = \sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

のグラフである.

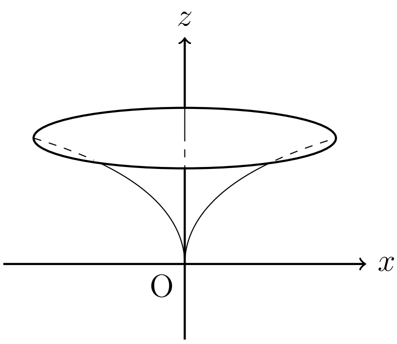


図 3: $z = \sqrt{\log(1+x)}$ による回転面

次に考えるのは, この立体の平面 $x = t$ による断面である. この部分は, 100均で購入したプラスチック製の漏斗を切断したものを提示した.

ちなみに, 同僚の教員はこの問題の解説時に, 茶碗を持参されていた.

図 4: アナログですが・・・

これをさらに x 軸の周りに回転させたときの通過領域が, 立体 V の断面となる.

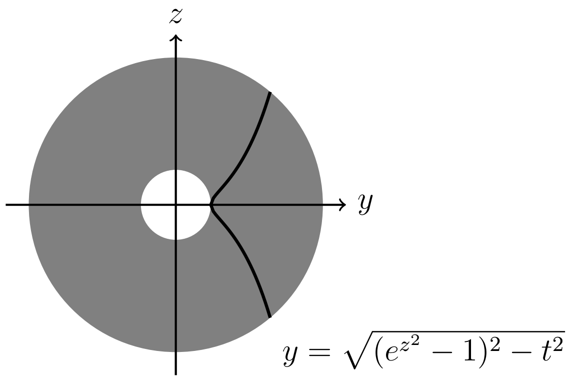


図 5: 立体 V の $x = t$ における断面

断面は円環となるが, イメージしづらい. そこで, 大きな洗濯バサミにケミカルライト（ともに100均で購入）を挟み, それをぐるぐる回転させる演示をして状況をイメージさせた.

図 6: 想像を逞しくして・・・

3　どちらが素直かな？

y 軸周りの回転体

曲線 $C : y = \sin x \ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$

と y 軸で囲まれた部分を, y 軸の周りに1回転させてできる立体の体積 V を求めよ.

通常であれば,

$$V = \pi \int_0^1 x^2 \, dy$$

を置換積分によって計算する．

$$y=\sin x \text{ より}, dy=\cos x\,dx$$

$$y:0\to 1 \text{ のとき}, x:0\to\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} V&=\pi\int_0^1 x^2\,dy\\ &=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x\,dx\\ &=\ldots=\frac{\pi^3}{4}-2\pi \end{aligned}$$

この解法に対して,「なんかスッキリしないんですよね・・・」という生徒の感想があった．置換をしているのは, 高校の範囲では「逆三角関数」を（正式には）扱わないからである．その利用を可とするならば, 次のような直接的な解法が考えられる．

$$\begin{aligned} \int \sin^{-1}x\,dx &= x\cdot\sin^{-1}x-\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\cdot\sin^{-1}x+\sqrt{1-x^2}+C \end{aligned}$$

を利用して,

$$\begin{aligned} \int(\sin^{-1}x)^2\,dx &= x\cdot(\sin^{-1}x)^2-2\int\frac{x\cdot\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\cdot(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\cdot\sin^{-1}x\\ &\quad -2\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\ &= x\cdot(\sin^{-1}x)^2+2\sqrt{1-x^2}\cdot\sin^{-1}x\\ &\quad -2x+C \end{aligned}$$

が得られるので,

$$\begin{aligned} \pi\int_0^1(\sin^{-1}y)^2\,dy &= \pi\cdot\left\{1\cdot\left(\frac{\pi}{2}\right)^2-2\right\}\\ &= \frac{\pi^3}{4}-2\pi \end{aligned}$$

生徒の質問を受けて別解を考えてみたが, 通常通り計算を実行した方が楽である（笑）．生徒にこの解法を伝えてみたが,「・・・(苦笑)」という反応だった．

なお, 教科書会社の営業の方から先日頂いた [3] には, $\sin^{-1}x$ 等の不定積分についての考察が載っていた．

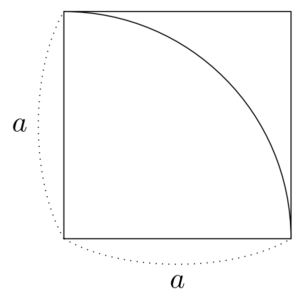
4　ビュフォンの針

大学では, 面積や体積の概念を一般化した「測度」という観点から確率についての講義を受けている．

そのことを思い出しながら, 授業では簡単な例で「面積と確率に関係がある」ことを確認した上で, 実験を行った．

瞬間を見逃すな

次の図の真上から針を落とすとき, 扇形の部分に落ちる確率 p_1 を求めよ．



求める確率 p_1 は, 正方形と扇形の面積比で決まるから

$$p_1=\frac{\text{扇形の面積}}{\text{正方形の面積}}=\frac{\pi}{4}$$

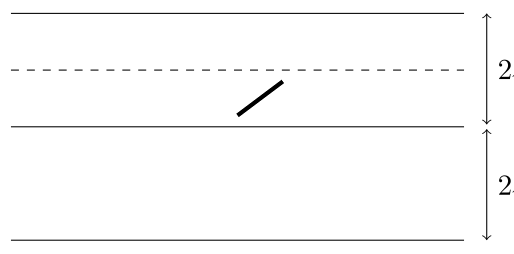
と考えられる．

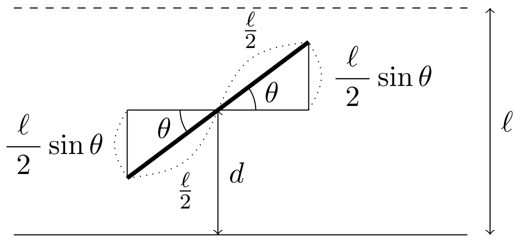
この結果から, 実験等で確率 p_1 を求めることができれば, 円周率 π の値を逆算することができることを, まず確認しておく．

その上で, この方式だと「針が落ちた瞬間を見逃すわけにいかず, 繰り返し何回も針を落として実験するのが大変である」ことを認識させ,「どうせだったら, 落ち着いて楽に実験したいよね・・・」と半ば強引に,「ビュフォンの針」へ誘導する．

後からゆっくり確認できる

幅 2ℓ の間隔で平行線を引き, 真上から長さ ℓ の針を落とすとき, 平行線と交わる確率 p_2 を求めよ．





針の中心と一番近い直線との距離を d, また, 針と直線とのなす角を θ とおくと,

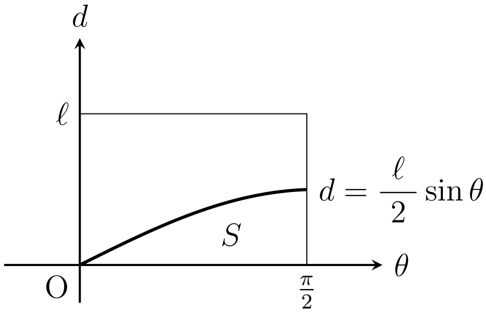
$$0 \leqq d \leqq \ell$$

$$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$$

である. そのとき, 針が直線と交わる条件は,

$$d \leqq \frac{\ell}{2}\sin\theta$$

である.



したがって, 曲線 $d = \dfrac{\ell}{2}\sin\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ell}{2}\sin\theta\, d\theta = \frac{\ell}{2}\Big[-\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\ell}{2}$$

となるので, 求める確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{\ell}{2} \div \frac{\pi\ell}{2} = \frac{1}{\pi}$$

となる.

隣の席の生徒とペアを作らせ, [4] を参考にして

- 平行線を引いた A3 の紙
- 10 本の爪楊枝
- 記録用紙

を配布して, 授業終了のチャイムが鳴るまでひたすら投げ続けさせた. 一度に 10 本の爪楊枝を同時に投げるので, 多くのサンプルを得ることができた.

授業後に集計をして, 翌日の授業で結果を報告した. 計 4 クラス (4 年前と昨年で 2 クラスずつ) で実施した結果を集約すると,

$$\frac{26730}{8164} \fallingdotseq 3.2741$$

であった.

5　終わりに

最近は, 生徒の質問を起点とするレポートを書くことが増えた. 生徒の質問は, 自身の数学力の向上につながり, また「授業のネタ」の宝庫だと思う.

次に, 「ビュフォンの針」に関しては, 意外な場面で円周率 π が出てくる例として楽しめる題材である. 一度に 10 本投げるのはいいアイディアだと思った.

コロナ禍で, 否が応でも ICT への取り組みが避けられないところではあるが, 筆者としては「ちょっとお馬鹿」で,「にやっと」できるアナログな実践も大事にしていきたいと思っている.

- 筆者自身が授業を楽しみたい
  ☜ 関西人故のショーマンシップか？
- その姿が生徒にも悪くない影響を与える
  ☜ 楽しさは感染るはず
- 生徒の印象に残る
  ☜ あっ！ あのときの・・・

と考えるからである.

参考文献等

[1] 長尾良平「どっちに凸？ で One more thing」第 116 回数学教育実践研究会レポート

[2]「2021 年受験用　全国大学入試問題正解　数学」旺文社

[3] 臼井達哉「逆関数の不定積分の公式」数研通信第 99 号

[4] デイリーポータル Z「針を落とせば円周率」 `https://dailyportalz.jp/b/2008/10/01/c/2.htm`