第116回数学教育実践研究会　レポート発表

どっちに凸？ でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和3年1月30日　Online 数実研

1　はじめに

数学Ⅲの「微分法の応用」の単元で, 曲線の凸性を扱っていた時の話である.

区間 I で $f''(x) > 0$ のとき,

- 区間 I で $f'(x)$ は増加関数である
- $f'(x)$ は接線の傾きに対応する

ことから, 「I において接線の傾きが増加する」ことが分かり, $y = f(x)$ のグラフは I において下に凸となる.

授業の後, 生徒から **「$f'(a) = 0$ となることは確認しなくていいんですか？」** との質問を受けた. そのやりとりを通して, 「生徒は, ある誤解をしているのではないか？」という予感がした.

本稿では, その質問を契機に, 凸性について扱った実践を中心に紹介していきたい.

2　生徒の感覚

翌日の授業において, 「$f''(x) = e^x > 0$ だから, $f(x) = e^x$ のグラフは下に凸ですね」という話をしたところ, そのクラスの3分の2の生徒は「えっ？ なんで？」という反応をしていた. その反応を見て, 前日の予感が確信に変わった.

生徒が初めて「凸」という用語に出会うのは, 数学Ⅰの「2次関数」である. $y = ax^2$ のグラフの特徴・まとめとして, 「上に凸」「下に凸」という用語が導入される. 準備室にあった5つの会社の「数学Ⅰ」の教科書を見てみたが,「グラフのかたちから」という表現はあるが, **「凸」自体の説明はされていない**. 生徒は, 高校数学の最初の方で出会う（そして, しばしば強調される）この「上に凸」「下に凸」の感覚を引きずっていると思った. つまり,

- 上に凸・・・山型
- 下に凸・・・谷型

という訳で, **「てっぺん」や「谷底」が無いと凸と捉えていない**ようである.

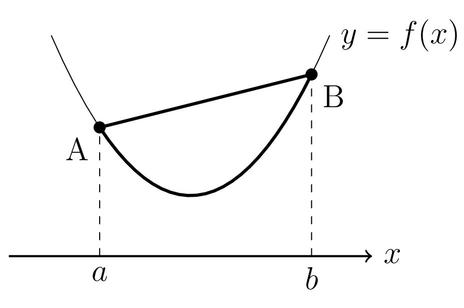
3　正しい理解に向けて

筆者も, **ついつい数学Ⅰの授業では「山型」「谷型」と言ってしまう**ことがあり, これが誤解に繋がっていたのだと反省するきっかけになった.

「関数 $y = f(x)$ のグラフが区間 I において下に凸である」ことの定義は, 次のような条件を満たすこととして述べられる.

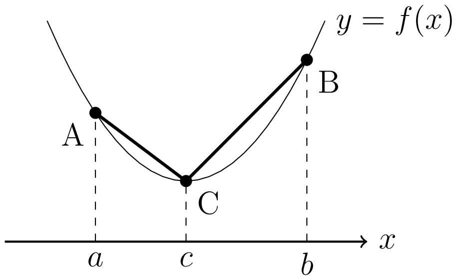
下に凸の定義（その1）

任意の $a, b \in I$ $(a < b)$ に対し, 2点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ と $\mathrm{B}(b, f(b))$ を考える.
そのとき, 線分 AB が $a \leqq x \leqq b$ における $f(x)$ のグラフより下側にこないことである.



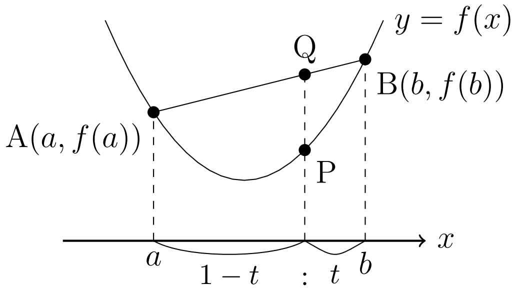
下に凸の定義（その 2）

任意の $a, b, c \in I$ $(a < c < b)$ に対し, 3 点 $\mathrm{A}(a, f(a))$, $\mathrm{B}(b, f(b))$, $\mathrm{C}(c, f(c))$ を考える. そのとき, 線分 AC の傾きが線分 CB の傾きより大きくならないことである.



下に凸の定義（その 3）

任意の $a, b \in I$ $(a < b)$ と任意の $t \in (0, 1)$ を考える.
そのとき, $f(ta+(1-t)b) \leqq tf(a)+(1-t)f(b)$ が成り立つことである.



P の y 座標：$f(ta + (1 - t)b)$
Q の y 座標：$tf(a) + (1 - t)f(b)$

これらの定義は, 全て同値なので, 1 つを定義として採用すると, 残りについては定理となる. 数学Ⅲで扱う $f''(x)$ の符号の話とこれらの定義を関連づけるために, 次の入試問題を授業では扱った.

問　関数 $y = f(x)$ の第 2 次導関数 $f''(x)$ の値が常に正とする.

このとき, 実数 a, b, t $(a < b\ ,\ 0 \leqq t \leqq 1)$ について, 不等式

$$f((1-t)a + tb) \leqq (1-t)f(a) + tf(b)$$

が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのはどのような場合か.　　[02 大阪市立大]

$\boxed{\text{解 1}}$

まず, $t = 0$ のとき $f(a) = f(a)$, $t = 1$ のとき $f(b) = f(b)$ となり, 等号が成り立つ.

$0 < t < 1$ のとき,

$$g(x) = (1-t)f(a) + tf(x) - f((1-t)a + tx)$$

を考える（$x > a$ とする）.

$$\begin{aligned} g'(x) &= tf'(x) - f'((1-t)a + tx)t \\ &= t\{f'(x) - f'((1-t)a + tx)\} \end{aligned}$$

ここで, $x > a$, $0 < t < 1$ より

$$x - \{(1-t)a + tx\} = (1-t)(x-a) > 0$$

であり, $f''(x) > 0$ より $f'(x)$ は単調増加なので,

$$f'(x) > f'((1-t)a + tx)$$

が成り立つ.

このとき, $g'(x) > 0$ より $g(x)$ は $x \geqq a$ で単調増加となり, $g(x) > g(a) = 0$ を得る. 以上より,

$$f((1-t)a + tx) \leqq (1-t)f(a) + tf(x)$$

が $x > a$, $0 < t < 1$ で成り立つ.

$\boxed{\text{解 2}}$

$t = 0, 1$ のときは $\boxed{\text{解 1}}$ と同じである.

平均値の定理を用いると

$$\frac{f((1-t)a + tb) - f(a)}{\{(1-t)a + tb\} - a} = f'(c_1)$$

つまり

$$\frac{f((1-t)a + tb) - f(a)}{t(b-a)} = f'(c_1) \cdots ①$$

を満たす c_1 が, 開区間 $(a, (1-t)a+tb)$ に存在し,

$$\frac{f(b) - f((1-t)a + tb)}{b - \{(1-t)a + tb\}} = f'(c_2)$$

つまり

$$\frac{f(b) - f((1-t)a + tb)}{(1-t)(b-a)} = f'(c_2) \cdots ②$$

を満たす c_2 が, 開区間 $((1-t)a+tb, b)$ に存在する.

$f''(x)>0$ より $f'(x)$ は単調増加なので,

$$f'(c_1) < f'(c_2)$$

が成り立ち, ① ② より,

$$\frac{f((1-t)a+tb)-f(a)}{t(b-a)} < \frac{f(b)-f((1-t)a+tb)}{(1-t)(b-a)}$$

が成り立つ.

$t>0, 1-t>0, b-a>0$ なので, 分母を払って変形を進めると

$$f((1-t)a+tb) < (1-t)f(a)+tf(b)$$

を得る.

4　別の場面での話

演習で京都大学の次の問題を扱った際のことである.

2020 年度京都大学（理系）大問 6

x, y, z を座標とする空間において, xz 平面内の曲線

$$z=\sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

を z 軸の周りに 1 回転させるとき, この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする. この S をさらに x 軸の周りに 1 回転させるとき, S が通過した部分よりなる立体を V とする. このとき, V の体積を求めよ.

最初に考えるのは,

$$z=\sqrt{\log(1+x)} \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

のグラフである.

授業では, 「上に凸な $y=\sqrt{x}$ に単調増加な $y=\log(1+x)$ を合成するから, $y=\sqrt{\log(1+x)}$ も上に凸だよね」などとテキトーなことを言いながらグラフの概形を書いていたが, 授業の後で「本当にそうなんですか？」との質問がきたので考えてみた.

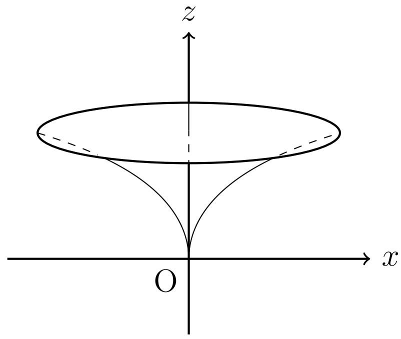


図 1: $z=\sqrt{\log(1+x)}$ による回転面

まず, $f(x)=\sqrt{x}, g(x)=\log(1+x)$ とおくと, $z=f(g(x))$ である.

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}>0\ ,\ f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}<0$$

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}>0\ ,\ g''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}<0$$

であり,

$$\frac{dz}{dx}=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dx^2}&=\{f'(g(x))\cdot g'(x)\}'\\&=f''(g(x))\cdot\{g'(x)\}^2+f'(g(x))\cdot g''(x)<0\end{aligned}$$

となるので, $z=\sqrt{\log(1+x)}$ のグラフは上に凸だと分かる.

一般化すると, 微分可能な関数について次のことが分かる.

合成関数のグラフが上に凸になる十分条件

- $y=f(x)$ は単調増加でグラフが上に凸
- $y=g(x)$ はグラフが上に凸

であれば, 合成関数 $y=f(g(x))$ のグラフは上に凸である.

準備室にあった [4] を読んでいたら, このことが演習問題として扱われているのを見かけた.

5　終わりに

[5] では, 旧旧旧課程の「微分・積分」の教科書 11 点について, 「関数のグラフが区間 I で下に凸であることの定義」の記述を調べている.

(1) 区間 I で接線の傾きが増加すること.

(2) グラフ上の任意の 2 点を結ぶ線分が, グラフより上方にあること.

(3) グラフの任意の接線に対して, グラフが接線より下側にないこと.

の 3 つに分類すると, (1) が 6 点, (2) が 4 点, (3) が 1 点とのことである. また, 大学生用に書かれた「微分積分学」の教科書における「関数の凹凸についての取り扱い」についての考察もあり, 興味深い.

なお, 準備室にあった現行課程での数学Ⅲの教科書 12 点について調べたところ, 全て (1) であり, 1 点だけ (2) に触れているものがあった. 30 年前と比べると, (1) 一色になっている.

授業での生徒とのやりとりを通して, 筆者の授業の「テキトーな部分」があぶり出され, 授業を見直すことに繋がった. また, 「何となくで処理した部分」について論理的に扱うことができた.

今後も, そんな事例を紹介できたらと思う.

参考文献等

[1] 「入試必修問題集　練磨　3rd Edition」
啓林館／河合塾

[2] 田島一郎「解析入門」岩波書店

[3] 「2021 年受験用　全国大学入試問題正解　数学」
旺文社

[4] S. ラング「解析入門　原著第 3 版」岩波書店

[5] 西川耿「凸関数の理論」
信州大学教養部紀要第 24 号（1990）

[6] 「曲線の凸性について」
数実研メーリングリスト IZUMI