第115回数学教育実践研究会　レポート発表

生徒の誤答でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和2年11月28日　Online 数実研

1　はじめに

生徒が問題演習をしていると, 当然間違えることがある. それらには, イージーなミスもあれば, もう少し精度を上げれば正答に到達するものもある.

そのような例を, ベクトルの単元から紹介したい.

2　内積に関連して

問　$\vec{a}, \vec{b}$ が $|3\vec{a}+\vec{b}|=2$, $|\vec{a}-\vec{b}|=1$ を満たすとき, $|2\vec{a}+3\vec{b}|$ のとり得る値の範囲を求めよ.

$\boxed{\text{正答例}}$

$$\vec{c}=3\vec{a}+\vec{b}\cdots①,\ \vec{d}=\vec{a}-\vec{b}\cdots②$$

とおく. すると,

$$|\vec{c}|=2, |\vec{d}|=1$$

である.

次に, $2\vec{a}+3\vec{b}$ を $\vec{c}, \vec{d}$ を用いて表すことを考える. ①② を $\vec{a}, \vec{b}$ について解くと,

$$\vec{a}=\frac{\vec{c}+\vec{d}}{4},\ \vec{b}=\frac{\vec{c}-3\vec{d}}{4}$$

となるので,

$$2\vec{a}+3\vec{b}=\frac{5\vec{c}-7\vec{d}}{4}$$

を得る. このとき,

$$\begin{aligned}|2\vec{a}+3\vec{b}|^2&=\frac{25|\vec{c}|^2-70\vec{c}\cdot\vec{d}+49|\vec{d}|^2}{16}\\&=\frac{25\cdot2^2-70\vec{c}\cdot\vec{d}+49\cdot1^2}{16}\\&=\frac{149-70\vec{c}\cdot\vec{d}}{16}\end{aligned}$$

と表せる.

ここで, $|\vec{c}\cdot\vec{d}|\leqq|\vec{c}||\vec{d}|=2$ だから,

$$-140\leqq70\vec{c}\cdot\vec{d}\leqq140$$

が成り立つ.

以上より,

$$\frac{9}{16}\leqq|2\vec{a}+3\vec{b}|^2\leqq\frac{289}{16}$$

となり,

$$\frac{3}{4}\leqq|2\vec{a}+3\vec{b}|\leqq\frac{17}{4}$$

を得る.

$\boxed{\text{誤答例}}$

条件式の両辺を2乗して,

$$9|\vec{a}|^2+6\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=4\ \cdots③$$

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1\ \cdots④$$

をまず考える. 次に, ③④ から

$|\vec{b}|^2$ を消去して, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{8}-|\vec{a}|^2\ \cdots⑤$

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ を消去して, $|\vec{b}|^2=\dfrac{7}{4}-3|\vec{a}|^2\ \cdots⑥$

を導き,

$$\begin{aligned}|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|^2 &= 4|\overrightarrow{a}|^2+12\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+9|\overrightarrow{b}|^2\\ &= -35|\overrightarrow{a}|^2+\frac{81}{4}\ \cdots ⑦\end{aligned}$$

のように, $|\overrightarrow{a}|$ を用いて表しておく.

⑥において, $|\overrightarrow{b}| \geqq 0$ より $|\overrightarrow{a}|^2 \leqq \dfrac{7}{12}$ が分かり, $|\overrightarrow{a}| \geqq 0$ なので, ⑦の最大・最小を $0 \leqq |\overrightarrow{a}|^2 \leqq \dfrac{7}{12}$ で考えると,

- $|\overrightarrow{a}|^2 = 0$ のとき, $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|^2$ は Max $\dfrac{81}{4}$

  ☞ $|\overrightarrow{a}| = 0$ のとき, $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|$ は Max $\dfrac{9}{2}$
- $|\overrightarrow{a}|^2 = \dfrac{7}{12}$ のとき, $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|^2$ は Min $-\dfrac{1}{6}$

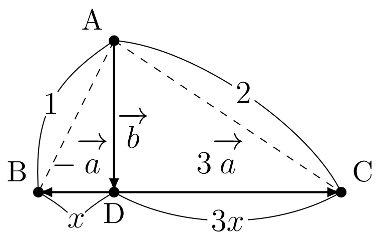
  ☞ $|\overrightarrow{a}| = \dfrac{\sqrt{21}}{6}$ のとき, Min？？？

⑦の式は正しいが最終的に誤答になったのは, $|\overrightarrow{a}|$ の範囲が正しくないことが原因だと思われる．そこで, $|\overrightarrow{a}|$ の範囲を考察して, 正答を導いてみたい.

修正例

$$|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}| = |-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}|$$

なので, 条件 $|3\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}| = 2, |-\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}| = 1$ を図示すると次のようになる.



BD の長さを x とすると $\mathrm{BC} = 4x$ で, △ABC の成立条件を考えると

$$1 < 2+4x\ ,\ 2 < 1+4x\ ,\ 4x < 1+2$$

であり , これより

$$\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4}$$

が分かる.

なお, △ABC が潰れたケースも（ぎりぎり）OK で, それは $x = \dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{4}$ のときである.

よって, ⑦を

$$\frac{1}{4} \leqq |\overrightarrow{a}| \leqq \frac{3}{4}\ \text{つまり},\ \frac{1}{16} \leqq |\overrightarrow{a}|^2 \leqq \frac{9}{16}$$

で考えると正答を得ることができる.

$$|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|^2 = -35|\overrightarrow{a}|^2+\frac{81}{4}$$

であったから,

- $|\overrightarrow{a}|^2 = \dfrac{1}{16}$ のとき, $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|^2$ は Max $\dfrac{289}{16}$
- $|\overrightarrow{a}|^2 = \dfrac{9}{16}$ のとき, $|2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}|^2$ は Min $\dfrac{9}{16}$

したがって,

$$\frac{3}{4} \leqq |2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}| \leqq \frac{17}{4}$$

を得る.

3 終わりに

はじめにも述べたが, 間違いには往々にして次のステップに至るための鍵が埋まっている．生徒の理解度やつまづきを把握するためには, 無視できないものである．しっかり取り上げることで, 個に応じた指導に繋がるだろう.

また, 生徒の解法には標準的な解答とはかけ離れたもの・効率の悪いものもあるだろうが, 自身の考え方の幅を広げるために, 付き合ってみるのも悪くないと考える.

生徒が, 間違えた答案をいつでも持って来られるようなスタンスでいたいと思う.

参考文献等

[1] 「NEW ACTION LEGEND 数学 II+B 」東京書籍