第114回数学教育実践研究会　レポート発表

生徒が課題でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和2年8月29日　Online 数実研

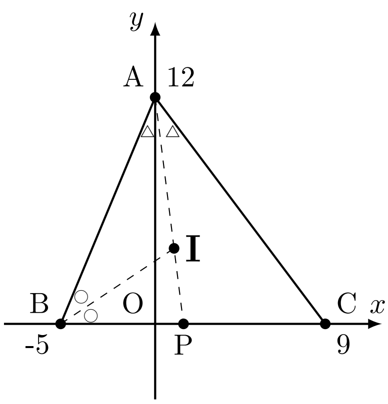
1　はじめに

週末課題の点検をしていると, 用意してある解答例と異なる答案を記述している生徒がいる. 特に、図形が関係する分野でその傾向が強い. 時には, その発想に感心させられることもある.

本稿では, その一例を紹介したい.

2　問題の紹介と解答例

問　3点 $A(0,12), B(-5,0), C(9,0)$ とする. そのとき, $\triangle ABC$ の内心 I の座標を求めなさい.



$\angle BAC$ の二等分線と BC との交点を P とする. $AB = \sqrt{12^2+5^2} = 13, AC = \sqrt{12^2+9^2} = 15$ なので, 角の二等分線の性質より

$$BP : PC = AB : AC = 13 : 15$$

が成り立つ. したがって, P の座標は $\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$ となる.

次に, $\angle PBA$ の二等分線と AP との交点を I とする. $BP = \dfrac{3}{2} - (-5) = \dfrac{13}{2}$ なので, 角の二等分線の性質より

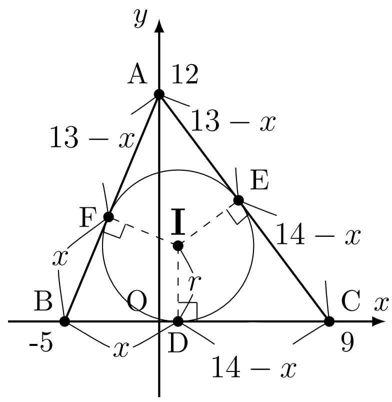
$$PI : IA = BP : BA = \frac{13}{2} : 13 = 1 : 2$$

が成り立つ. したがって, I の座標は $(1,4)$ となる.

3　生徒の別解

解答例は「内心は角の二等分線の交点」「角の二等分線の性質」に基づく標準的な解法で, 生徒には必ずマスターして欲しいものである. ここからは, 生徒の考えた別解を紹介していきたい.

(1)　「お箸の原理」「$S = sr$ の利用」



「お箸の原理」とは, 「円外の点から引いた2本の接線の接点までの長さは等しい」という性質の（筆者の授業における）通称である.

IからBC, CA, ABに下ろした垂線の足をD, E, Fとし, BP $= x$とおく.

$$\mathrm{AC} = (13 - x) + (14 - x) = 15$$

より$x = 6$となり, Iのx座標$= 1$となる.

次に,

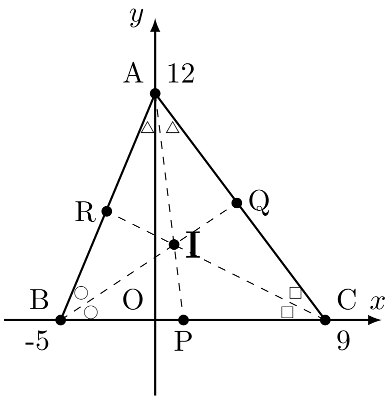
$$\triangle\mathrm{ABC}\text{の面積}\ S = \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$$

であり, 内接円の半径をrとすると

$$\frac{13 + 14 + 15}{2} \times r = 84$$

が成り立つので, $r = 4$. よってI$(1, 4)$が求まる.

(2)　「角の二等分線の方程式」を連立して



角A, B, Cの二等分線と対辺との交点を, それぞれP, Q, Rとする.

まず, BP : PC $= 13 : 15$よりP$\left(\dfrac{3}{2}, 0\right)$となり, 直線APの方程式は

$$y = -8x + 12 \cdots ①$$

次に, CQ : QA $= 14 : 13$よりQ$\left(\dfrac{13}{3}, \dfrac{56}{9}\right)$となり, 直線BQの方程式は

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3} \cdots ②$$

①と②を連立させて, I$(1, 4)$.

(3)　「点と直線の距離」の利用（その1）
☜ Iのy座標が4と分かっているとき

I$(m, 4)$と直線AB : $12x - 5y + 60 = 0$との距離は$r = 4$に等しいので,

$$\frac{|12m - 20 + 60|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|12m + 40|}{13} = 4$$

$|12m + 40| = 52$より, $12m + 40 = \pm 52$. これを解くと, $m = 1, -\dfrac{23}{3}$.

明らかに$m = -\dfrac{23}{3}$は不適なので, $m = 1$.

(4)　「点と直線の距離」の利用（その2）
☜ Iのy座標が分かっていないとき

まず, I(m, n)とおく.

- Iと直線BC : $y = 0$との距離は, Iが$\triangle$ABCの内部の点だから$n > 0$となることより,

$$|n| = n \cdots ③$$

- Iと直線AB : $12x - 5y + 60 = 0$との距離は

$$\frac{|12m - 5n + 60|}{\sqrt{12^2 + (-5)^2}} = \frac{|12m - 5n + 60|}{13} \cdots ④$$

Iと原点Oは直線ABに関して同じ側にあり,

$$12 \cdot 0 - 5 \cdot 0 + 60 = 60 > 0\ \text{より}\ 12m - 5n + 60 > 0$$

- Iと直線CA : $4x + 3y - 36 = 0$との距離は

$$\frac{|4m + 3n - 36|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|4m + 3n - 36|}{5} \cdots ⑤$$

Iと原点Oは直線CAに関して同じ側にあり,

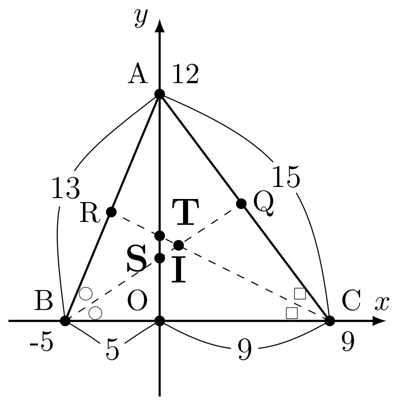
$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 36 = -36 < 0\ \text{より}\ 4m + 3n - 36 < 0$$

よって, ③ ④ ⑤より

$$\begin{cases} \dfrac{12m - 5n + 60}{13} = n \\ \dfrac{-(4m + 3n - 36)}{5} = n \end{cases}$$

これを解いて, $m = 1, n = 4$.

(5)　(2) の改良（その 1）



角 B, C の二等分線と **y 軸との交点を S, T** とする.

OS : SA = 5 : 13 より, S $\left(0, \dfrac{10}{3}\right)$.

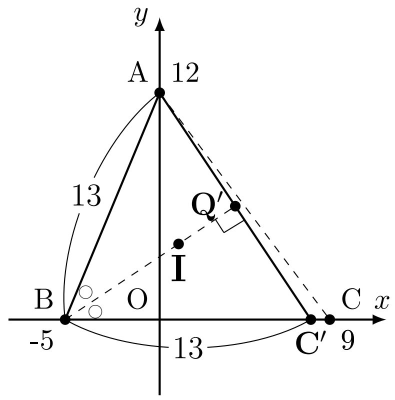
直線 BS の方程式は, $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3} \cdots$ ⑥

OT : TA = 3 : 5 より, T $\left(0, \dfrac{9}{2}\right)$.

直線 CT の方程式は, $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2} \cdots$ ⑦

⑥ と ⑦ を連立させて, I$(1, 4)$.

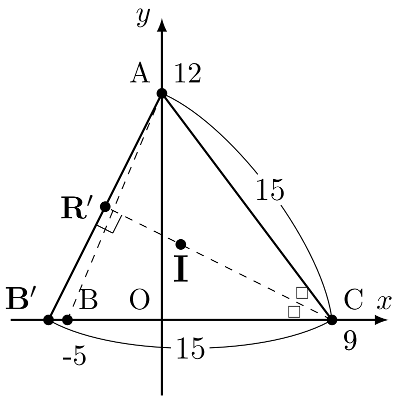
(6)　(2) の改良（その 2）



AB = 13 なので, C$'$**(8, 0)** を考える．そのとき, BC$'$ = 13 となり, △BAC$'$ は BA = BC$'$ の二等辺三角形となる.

よって, 角 B の二等分線は AC$'$ の垂直二等分線となり, 交点を Q$'$ とすると Q$'(4, 6)$.

直線 BQ$'$ の方程式は, $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3} \cdots$ ⑧



CA = 15 なので, B$'$**(−6, 0)** を考える．そのとき, CB$'$ = 15 となり, △CAB$'$ は CA = CB$'$ の二等辺三角形となる.

よって, 角 C の二等分線は AB$'$ の垂直二等分線となり, 交点を R$'$ とすると R$'(-3, 6)$.

直線 CR$'$ の方程式は, $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2} \cdots$ ⑨

⑧ と ⑨ を連立させて, I$(1, 4)$.

4　終わりに

正答に至るには冒頭の解答例が一番スマートだが, **(5)(6) の発想には感心した**.

- (5) は y 軸上の点 S, T を考えるのが上手い
  ☜ 内分の計算は y 座標のみ
- (6) は x 軸上の点 B$'$, C$'$ を考えるのが上手い
  ☜ Q$'$, R$'$ は, それぞれ AC$'$, AB$'$ の中点

別解は, その都度正しいかどうかをチェックしなければならないので,（正直なところ）点検時には**あまり出てきて欲しくない存在である**.

一方, 生徒が定型的な解法に収まらず, 工夫した努力の跡でもあり, 点検しながら**別解の出現を待っている自分がいる**.

これからも, 生徒の別解の出現を楽しみにできる自分でいたいと思う.

参考文献等

[1] 「NEW ACTION LEGEND 数学 II+B 」東京書籍