第113回数学教育実践研究会　レポート発表

生徒の疑問でOne more thing 2

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和2年6月6日　Online 数実研

1　はじめに

生徒の疑問から展開するシリーズの2回目. 今回は, 皆さんにもお馴染みの「あの不等式」に関わる疑問です.

2　疑問の紹介

定期考査の大問の一部として

tが実数のとき, $2^t + 2^{-t}$の最小値を求めよ

という問いがあった.

$2^t > 0, 2^{-t} > 0$ なので, 相加・相乗平均の不等式より,

$$2^t + 2^{-t} \geqq 2\sqrt{2^t \cdot 2^{-t}} = 2$$

が成り立つ. 等号成立は

$$2^t = 2^{-t}$$

のときで, $t = 0$ である.

定期考査の返却後には「解き直しレポート」を提出させているが, その点検時に「この問の逆」に相当する

「$2^t + 2^{-t} \geqq 2$ ならば t は実数」は自明ですか？

という書き込みを見つけた.

「自明」というワードに引っかかりを感じた筆者は, 自明かどうか確かめてみることにした.

3　筆者の解答

直感的に「自明ではない」と思ったので, 変数 t が虚数の場合を考えた. 手始めに, 質問応答システムである **Wolfram Alpha** の力を借りることにしてみた.

$2^t + 2^{-t}$ の t に色々と虚数の値を代入し, その値を確認することにしたが, 結果は

- 値が実数にならない
- 実数になったとしても 2 を下回る

ものばかりであった. そこで, 理論的に考えようと方針転換した. また, 「$2^t + 2^{-t} \geqq 2$」の特別なケースとして「$2^t + 2^{-t} = 2$」の時を考えることにした. そのときに用いたのは,

$$\alpha^z = e^{z \log \alpha}$$

という関係式である. $\alpha = 2$ のケースで考え, オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

を組み合わせると（$z = x + iy$ として）,

$$\begin{aligned} 2^z &= e^{(x+iy)\log 2} \\ &= e^{x\log 2} \cdot e^{iy\log 2} \\ &= e^{x\log 2}\{\cos(y\log 2) + i\sin(y\log 2)\} \end{aligned}$$

となる. 2^{-z} についても同様に

$$\begin{aligned} 2^{-z} &= e^{-(x+iy)\log 2} \\ &= e^{-x\log 2}\{\cos(-y\log 2) + i\sin(-y\log 2)\} \\ &= e^{-x\log 2}\{\cos(y\log 2) - i\sin(y\log 2)\} \end{aligned}$$

と計算できる．このとき，

$$\mathrm{Re}(2^z+2^{-z})=\cos(y\log 2)\cdot\left(e^{x\log 2}+\frac{1}{e^{x\log 2}}\right)$$

$$\mathrm{Im}(2^z+2^{-z})=\sin(y\log 2)\cdot\left(e^{x\log 2}-\frac{1}{e^{x\log 2}}\right)$$

となるので, $\mathrm{Im}(2^z+2^{-z})=0$ となるようにすればいいことが分かる．

$x=0$ のとき $e^0=1$ だから, $\mathrm{Im}(2^z+2^{-z})=0$ となり, このとき

$$2^z+2^{-z}=2\cos(y\log 2)$$

となる．したがって, $y=\dfrac{2\pi}{\log 2}$ をとると目的が達成できる．つまり,

$$\begin{aligned}2^{\frac{2\pi}{\log 2}i}+2^{-\frac{2\pi}{\log 2}i}&=2\cos\left(\frac{2\pi}{\log 2}\cdot\log 2\right)\\&=2\cos 2\pi=2\end{aligned}$$

なお, $|\cos\theta|\leqq 1$ だから, 副産物として次の不等式が得られる．

$$z\text{ が純虚数のとき}, -2\leqq 2^z+2^{-z}\leqq 2$$

4　元の不等式の解について

結果を「数実研メーリングリスト IZUMI」に投稿したところ,「正しいと思う」とのフォローを頂いた．また, 会員の安田先生は, 元の不等式

$$2^z+2^{-z}\geqq 2$$

の「複素数解」を考察された．それを紹介したい．なお, 筆者の計算過程を一部引用する．

まず, 不等式が成立するためには, 左辺が実数であることが必要である．

$$\mathrm{Im}(2^z+2^{-z})=\sin(y\log 2)\cdot\left(e^{x\log 2}-\frac{1}{e^{x\log 2}}\right)$$

が 0 になるのは,

$$e^{x\log 2}-\frac{1}{e^{x\log 2}}=0\text{ , または }\sin(y\log 2)=0$$

前者は, 筆者が考察したケースで $x=0$ のときである．このとき,

$$z=\frac{2n\pi}{\log 2}i\quad(n\in\mathbb{Z})$$

が解となる（不等式において, 等号が成立）．

後者は,

$$y=\frac{n\pi}{\log 2}\quad(n\in\mathbb{Z})$$

のときで,

$$\begin{aligned}2^z+2^{-z}&=\cos\left(\frac{n\pi}{\log 2}\cdot\log 2\right)\cdot\left(e^{x\log 2}+\frac{1}{e^{x\log 2}}\right)\\&=(-1)^n\cdot\left(e^{x\log 2}+\frac{1}{e^{x\log 2}}\right)\end{aligned}$$

ここで,

$$e^{x\log 2}+\frac{1}{e^{x\log 2}}\geqq 2$$

であるから, 不等式が成り立つためには, n は偶数でなければならない．そのとき,

$$2^z+2^{-z}\geqq 2$$

が成り立つ．このとき,

$$z=x+\frac{2n\pi}{\log 2}i\quad(x\in\mathbb{R}\text{ },n\in\mathbb{Z}\text{ はともに任意})$$

が解となる（前者は $x=0$ の場合でこの解に含まれる）．

5　終わりに

「今まで考えたこともない」ことを提起してくれた生徒に, 感謝したい．生徒の自由な発想を, これからも大事にしていきたいと思う．

また, 解決の過程において, 大学で学んだ数学を活用した．(普段から「数学セミナー」等は読んでいるが) 授業で扱う内容に留まらず, 数学を学んでいきたいと感じた．

参考文献等

[1] Wolfram Alpha
https://www.wolframalpha.com

[2] 樋口禎一 他「現代複素関数通論」
培風館

[3] 相川弘明「複素関数入門 (共立講座 数学探検)」
共立出版

[4] 「虚数乗の値について」
数実研メーリングリスト IZUMI