第112回数学教育実践研究会　レポート発表

生徒の疑問でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和2年1月25日　日本生命札幌北口ビル

1　はじめに

授業後に, ノートや問題集を持って質問にくる生徒がいる. たわいもない質問も多いが, 筆者が色々考えされられるものもある.

本稿では, その一例を紹介したい.

2　質問の紹介

生徒が持ってきた質問は次の問題に関するものである.

問　関数 $f(x) = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(x-3)^2+4}$ の最大・最小を求めよ.

生徒の質問を紹介するために, 答案を作っていこう. まず, 微分して

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-3)}{\sqrt{(x-3)^2+4}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}} \qquad \cdots ① \end{aligned}$$

となる. $f'(x) = 0$ とおくと,

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = -\frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}} \qquad \cdots ②$$

両辺を2乗し, 分母を払うと

$$x^2\{(x-3)^2+4\} = (x-3)^2(x^2+1)$$

となり, 整理すると

$$x^2+2x-3=0 \qquad \cdots ③$$

となる.

② において, 両辺の分母は正だから, 両辺の符号が揃うのは $0<x<3$ のときである. そのことに留意して ③ を解くと, $x=1$ を得る.

したがって, 増減表を作成すると次のようになり, $x=1$ で最小値 $3\sqrt{2}$ をとる.

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$3\sqrt{2}$	$\nearrow$

生徒の質問とは, **「$f'(x)$ の符号って本当にそうなんですか？ 不等式として示せますか？」**というものであった. 実戦的には,

- $x<1, 1<x$ において, $f'(x)$ は定符号
  ☜ $f'(x)=0$ となるのは, $x=1$ のみ
- $x<1$ で $f'(x)<0$, $1<x$ で $f'(x)>0$
  ☜ それぞれ, $f'(0)<0$, $f'(3)>0$ より

と判断して増減表の $f'(x)$ の欄は記入できる訳だが, それではスッキリしないようだ.

そこで, 筆者は職員室に持ち帰って考えてみることにした.

3　筆者の解答

① を通分した

$$f'(x) = \frac{x\sqrt{(x-3)^2+4} + (x-3)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

において, $f'(x)$ の分母の符号は正なので, $f'(x)$ の符号は分子で決まる．だから,

$$g(x) = x\sqrt{(x-3)^2+4} + (x-3)\sqrt{x^2+1}$$

とおき, $g(x)$ の符号を考える．

式の形から,

- $x \leqq 0$ のとき, $g(x) < 0$
- $3 \leqq x$ のとき, $g(x) > 0$

は明らかである．したがって, $0 < x < 3$ のときを考える．このとき,

$$\boldsymbol{x = \sqrt{x^2}\ ,\ x - 3 = -\sqrt{(x-3)^2}}$$

が成り立つので, $g(x)$ は

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{x^2\{(x-3)^2+4\}} - \sqrt{(x-3)^2(x^2+1)} \\ &= \sqrt{M+4x^2} - \sqrt{M+(x-3)^2} \end{aligned}$$

と表せる（$M = x^2(x-3)^2$ とおいた）．

そこで, $4x^2$ と $(x-3)^2$ の大小比較を考える．

$$h(x) = 4x^2 - (x-3)^2$$

とおくと, $h(x) = 3(x+3)(x-1)$ となるので,

- $0 < x < 1$ のとき, $h(x) < 0$
- $1 < x < 3$ のとき, $h(x) > 0$

と分かる．

以上より, $x < 1$ のとき $f'(x) < 0$, $x > 1$ のとき $f'(x) > 0$ となることが示された．

4　寄せられた別解

この内容を「数実研メーリングリスト IZUMI」に投稿したところ, 別解が 2 つ寄せられたので紹介したい．

1 つ目は会員の安田先生によるものである．筆者の解答例から分かるように, $x \leqq 0, 3 \leqq x$ については すぐ分かるので, $0 < x < 3$ の部分の処理に主眼がおかれている．

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (x > 0)$$

とおくと, $0 < a < b$ のとき

$$\begin{aligned} g(a) &= \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{a}\right)^2}} \\ &< \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{1}{b}\right)^2}} = \frac{b}{\sqrt{b^2+1}} = g(b) \end{aligned}$$

となり, **$g(x)$ は狭義単調増加関数**である．なお, $0 < x < 3$ においては $\dfrac{3-x}{2} > 0$ なので,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2+4}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{\dfrac{3-x}{2}}{\sqrt{\left(\dfrac{3-x}{2}\right)^2+1}} \\ &= g(x) - g\left(\frac{3-x}{2}\right) \end{aligned}$$

と表すことができ,

- $x < \dfrac{3-x}{2}$ では $f'(x) < 0$
  ☜ したがって, $0 < x < 1$ で $f'(x) < 0$
- $x > \dfrac{3-x}{2}$ では $f'(x) > 0$
  ☜ したがって, $1 < x < 3$ で $f'(x) > 0$

が分かる．

$g(x)$ という関数を巧みに使って処理しているあたり, 筆者の証明よりエレガントだと思う．

なお, 安田先生は**この問題を一般化し, 次の結果を得られている**．

a_1, a_2, c_1, c_2 は正の数とする．そのとき

$$f(x) = \sqrt{(a_1x+b_1)^2+{c_1}^2} + \sqrt{(a_2x+b_2)^2+{c_2}^2}$$

について

- $x < -\dfrac{b_1c_2+b_2c_1}{a_1c_2+a_2c_1}$ のとき, $f'(x) < 0$
- $x > -\dfrac{b_1c_2+b_2c_1}{a_1c_2+a_2c_1}$ のとき, $f'(x) > 0$

となり, $f\left(-\dfrac{b_1c_2+b_2c_1}{a_1c_2+a_2c_1}\right)$ が最小値となる.

2 つ目は札幌旭丘高校の菅原先生・北山先生によるものである.

① を通分した

$$f'(x)=\frac{x\sqrt{(x-3)^2+4}+(x-3)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x-3)^2+4}}$$

において,

$$A=x\sqrt{(x-3)^2+4}$$
$$B=(x-3)\sqrt{x^2+1}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{x\sqrt{(x-3)^2+4}+(x-3)\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x-3)^2+4}}\\&=\frac{A+B}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x-3)^2+4}}\\&=\frac{A^2-B^2}{\sqrt{x^2+1}\sqrt{(x-3)^2+4}\cdot(A-B)}\end{aligned}$$

と表せる. ここで,

$$\begin{aligned}A^2-B^2&=x^2\{(x-3)^2+4\}-(x-3)^2(x^2+1)\\&=3(x^2+2x-3)=3(x+3)(x-1)\end{aligned}$$

となるから, A, B, A^2-B^2 の正負を場合分けして考え, $f'(x)$ の正負を調べる（$x=-3,0,1,3$ が境界となる）. なお, $f'(x)$ の符号と $A+B$ の符号が一致するが, $A+B$ の符号が判断しづらいときは, **A^2-B^2 と $A-B$ の符号から $A+B$ の符号を判断**する.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
$A+B$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$A-B$	$-$		$+$		$+$		$+$		$+$
A^2-B^2	$+$		$-$		$-$		$+$		$+$
$f'(x)$	$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$

高校生にとっては, 筆者の「$\sqrt{}$ 内に強引に入れる」, 安田先生の「$g(x)$ を見抜く」よりハードルが低く, 自然な発想の解法だと思う.

また, 正数同士の不等式（$A>B$）の証明では, $A+B>0$ を根拠に $A-B>0$ と $A^2-B^2>0$ が同値となるが, この解法では $A-B$ と A^2-B^2 の符号から $A+B$ の符号が分かるのが面白いと思う.

5　終わりに

生徒の質問から始まった話題だったが, 式変形等に解答作成者のこだわりが感じられて興味深かった. 問題を解く際には,

- 教員目線
  ☜ その問題の本質・背景を探る発想
- 生徒目線
  ☜ 生徒が思いつくような発想

の両方を大切にしたいと感じた.

「3 人寄れば・・・」という古事成語もあるが, 本稿は「数実研メーリングリスト IZUMI」への投稿, およびそこでの議論が執筆のきっかけとなっている. そこでは, 12 月末までに 44 件の記事が投稿され, 各々について議論がなされてきた.

年 4 回の研究会を補足し, また遠方で参加できない方にも意見・情報交換の場を提供したいということで復活したメーリングリストは, もうすぐ 2 周年を迎える. 興味のある方は, 管理者である小樽桜陽高校の若林先生まで連絡をとっていただきたい.

参考文献等

[1] 「改訂版 教科書傍用 4STEP 数学 III」
数研出版

[2] 「導関数の符号の決定に際して」
数実研メーリングリスト IZUMI