第109回数学教育実践研究会　レポート発表

常用対数でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

令和元年6月1日　北海道大学理学部5号館

1　はじめに

コンピュータの進化により, 常用対数は**「常用」ではなくなった**. しかし, **「天文学者の寿命を2倍に伸ばした発明」**といわれるだけあって, 近代科学において果たした役割は大きい.

高校数学での扱いも軽いものになっているが, **他教科と関連する内容もあり, 授業で扱うには良い題材**だと思っている. 本レポートでは, 前任校時代の実践も含め紹介していきたい.

2　他教科との関わり

他教科の授業で扱われる内容で, 対数の考え方が使われているものを幾つか取り上げ, 教養講座的な授業を行った.

例1　水素イオン指数pH

酸性・塩基性の度合いを示す水素イオン指数の定義に, 常用対数が用いられている. 水素イオン濃度を $[\mathrm{H}^+]$ で表す時,

$$\mathrm{pH} = -\log_{10}[\mathrm{H}^+]$$

で定義される. 前任校は室蘭にあり, 登別や洞爺といった温泉地が近かったため, 温泉の成分表示などと絡めて取り上げた.

例2　地震のエネルギーと規模の関係

日本は災害大国で, 北海道も昨年大きな地震災害に見舞われた. 地震速報では, 「地震の規模を示すマグニチュードは・・・」というアナウンスをよく耳にする. 地震のエネルギーを E, 規模（マグニチュード）を M で表す時,

$$\log_{10} E = 4.8 + 1.5M$$

という関係があり, この関係式を書き換えると,

$$E = 10^{4.8} \cdot 10^{1.5M}$$

となる. 兵庫県南部地震がM7, 東北地方太平洋沖地震がM9であり, マグニチュードは2異なる. そのとき, エネルギーは $10^3 = 1000$ 倍になることが, この式から分かる.

例3　星の明るさの等級

星の明るさを示す等級には, 「等級が5つ上がると明るさは100倍」という決まりがある. よって, 等級が1つ上がると明るさが x 倍になるとすると, $x^5 = 100$ が成り立つ. 両辺で常用対数を考えて式変形を進めると

$$\log_{10} x = \frac{2}{5}$$

となり, 常用対数表を引くと

$$\log_{10} 2.52 = 0.4014$$

が見つかり, $x \risingdotseq 2.52$ が得られる.

授業では, おおいぬ座のシリウス（-1.4 等級）や北極星（2等級）, 太陽（-26.7 等級）について紹介し, 明るさの比較や星座について触れた.

例4　平均律

音律の定め方は1通りではなく, 1オクターブを均等に半音12個分に分割した平均律がよく知られている. 1オクターブ上がると周波数は2倍

になるので, 半音上がると周波数が x 倍になるとすると, $x^{12}=2$ が成り立つ. 例 3 と同様にして,

$$\log_{10} x = \frac{1}{12}\log_{10} 2 \fallingdotseq 0.025$$

となり, 常用対数表を引くと

$$\log_{10} 1.06 = 0.0253$$

が見つかり, $x \fallingdotseq 1.06$ が得られる.

授業では, iOS 用のアプリ「Meantone」を用いて平均律の和音と, 異なる音律である純正律の和音を聞き比べることも行った.

例 5　対数グラフ用紙

ケプラーは, ティコ・ブラーエによる観測データをもとに, 惑星の運動について次の内容からなるケプラーの法則を導いた.

1. 楕円軌道
2. 面積速度一定
3. 長軸と周期の関係

第 3 法則は, 楕円軌道の長軸 a と公転周期 P について, $P^2=a^3$（長さを天文単位にとった時）と表せる. そこで, 幾つかの惑星について, 長軸 a と周期 P についてのデータを提示し, 両対数グラフにプロットさせた.

天体	長軸 a（天文単位）	周期 P（年）
水星	0.387	0.241
金星	0.723	0.615
地球	1.00	1.00
火星	1.52	1.88
木星	5.20	11.9
土星	10.0	29.5
天王星	19.2	84.3
海王星	30.1	165

プロットした点に対する回帰直線（らしきものを）を引かせ, 傾きを読み取らせると 1.3〜1.7 位になる. そこで, 「真ん中は 1.5 ぐらいだね」と誘導し（やや強引）, 関係を立式すると

$$\log_{10} P = \frac{3}{2}\log_{10} a + n \quad (n \text{ は } P \text{ 切片})$$

となる. 地球だと $a=1$ のとき $P=1$ となるので, 代入して $n=0$. したがって, $P^2=a^3$ が導かれる.

3　計算尺

電卓が普及する以前, 計算尺は手軽に計算ができるツールとして理工系を中心に用いられており, 「計算尺検定」も実施されていたそうである.

尺を動かすだけで計算できるのは, **目盛りの振り方に秘密**がある. 例えば

$$\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = \log_{10} 6$$

であるから, 「2〜6 の長さ」が「1〜3 の長さ」と等しくなるように振られている.

初任校の夕張緑ケ丘実業高校は平成 15 年 3 月に閉校となったが, その際に工業科の先生から計算尺 2 本を譲っていただいた. 前任の室蘭東翔高校では, [7] にある PDF データをダウンロードし, 生徒に切らせて使用させていた. 現任校の札幌南高校では, 物理教室に計算尺が約 40 本あったため, それをお借りしている. また, 「高精細な計算尺」という iOS 用アプリもある.

生徒は, レトロな竹製の計算尺を物珍しげに見つめ, スライドさせて計算結果が出るのを楽しんでいた. また, 対数の性質をうまく利用していることに感心していた.

余談だが, 昨年 11 月に実施された「大学入学共通テスト試行調査」の数学②に「対数ものさし」を題材にした出題があった. **「授業で計算尺を取り上げていること」に対して自信**を持ったと同時に, **「本番にとっておいて欲しかったなあ・・・」**という気持ちでいる（共通テスト初年度に当たる学年を教えているため）.

4　常用対数の求め方

教科書の巻末には常用対数表が載っているが, ネイピア, ビュルギ, ブリッグスらの膨大な計算を経て完成を見ている. 小数第 2 位くらいまでであれば, 不等式評価を用いて求めることができるので, 授業でも扱っている. **生徒にとっては, 試行錯誤が要求されるので, 一番苦手なタイプの問題**である.

例 5　$\log_{10} 2$ の値を小数第 2 位まで求める.

$$10^3 < 2^{10} \text{ より } \frac{3}{10} < \log_{10} 2$$

$$2^{13} < 10^4 \text{ より } \log_{10} 2 < \frac{4}{13}$$

が成り立つので,

$$0.3 = \frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{4}{13} < 0.307$$

となり, $\log_{10} 2$ の小数第 2 位までは 0.30 と分かる.

授業では, [4] を参考にして, 先人の**凄まじい求値への執念**を紹介した.

(1) まず, 2 の 2^{54} 乗根を小数第 32 位まで計算.
☜ 1.00000000000000003847739796558310

(2) 次に, 10 の 2^{54} 乗根を小数第 32 位まで計算.
☜ 1.00000000000000012781914932003235

(3) $2^{\frac{1}{2^{54}}} = 1 + a$, $10^{\frac{1}{2^{54}}} = 1 + b$ とおく.
☜ ここで, $a \fallingdotseq 0$, $b \fallingdotseq 0$ である.

(4) $\log_{10} 2 = p$ とおくと $1 + a = (1 + b)^p$
☜ $2^{\frac{1}{2^{54}}} = (10^p)^{\frac{1}{2^{54}}} = (10^{\frac{1}{2^{54}}})^p$ より.

(5) $b \fallingdotseq 0$ より $1 + a \fallingdotseq 1 + pb$ が成り立つ.
☜ $b \fallingdotseq 0$ のとき, $(1 + b)^p \fallingdotseq 1 + pb$ より.

(6) $p \fallingdotseq \dfrac{a}{b} = 0.30102999566398119\ldots$ を得る.
☜ これは小数第 17 位まで正しい.

筆者は, 中学校で開平法を教科担任に（やりかただけ）教えてもらった記憶がある. [5] には計算手順とその理屈が載っている. 数学 I ではなく, 常用対数を教えるタイミングで開平法を紹介するのも良いのではないだろうか. 平方根に関連しては, [8] にあるようなニュートン法の紹介も考えられる.

開平法を使うと, 電卓がなくても平方根の値を求めることができるが, 桁数を多く求めようと思うとなかなか大変である. 先人が, とてつもない計算を実行して常用対数の値を求めていることに対しては, **ただただ脱帽するしかない**.[6] では, ブリッグスの努力の跡を知ることができる.

5　終わりに

教科書では桁数や小数首位の問題が主で, 応用面について殆ど触れられていないのは, もったいないと思う. 生徒に色々な角度から数学との関わりを意識させることは, 大切だと考える. また, 数学の**「理論が作られていく過程」**や**「その際の苦労」を紹介**することは, **「人類の歩みとしての数学」**を伝えることになるだろう.

これからも, 数学の舞台裏や応用面を授業の中に取り入れ, 生徒への刺激を与えていきたいと思う.

参考文献等

[1] 一松信「初等関数概説 – いろいろな関数 –」
森北出版

[2] 志賀浩二「数の大航海　対数の誕生と広がり」
日本評論社

[3] 「大学入試共通テスト　平成 30 年度試行調査」
独立行政法人大学入試センター

[4] E. ハイラー・G. ワナー著「解析教程　上」
シュプリンガー・フェアラーク東京

[5] 改訂版「チャート式　基礎からの数学 I + A」
数研出版

[6] H. ブリッグス著「Arithmetica Logarithmica」
translated and annotated by Ian Bruce

[7] 計算尺推進委員会
http://www.pi-sliderule.net

[8] 長尾良平「いろんな極限で One more thing」
第 104 回数学教育実践研究会レポート

[9] 長尾良平「関数のグラフで One more thing 2」
第 108 回数学教育実践研究会レポート