

第108回数学教育実践研究会 レポート発表

関数のグラフでOne more thing 2

北海道札幌南高等学校教諭 長尾良平

平成31年1月26日 ニッセイMKビル

1 はじめに

筆者は半年前に、[1]において二次関数のグラフについての実践を紹介した。今回は第2弾として、指数関数・対数関数、三角関数のグラフについての実践を紹介していきたい。

2 指数関数のグラフ

指数関数のグラフの導入としては、[2]で紹介されている「平和祈念像」を用いた導入を数年来行っている。本校では見学旅行で（平和学習の一環として）長崎を訪れるので、生徒にとっても「良い予習？」になる。

授業では、

- (1) $y = 2^x$ のグラフを板書
- (2) 底が1より大きい場合に一般化
- (3) 図1を見せて印象づける



図1: 底が1より大きい場合

という流れで行う。図1を見せた際に「何の像か知ってますか？」と聞くと、数名の生徒が「長崎の平和祈念像です！」と答えてくれる。

続けて、「この写真何か違和感ありませんか？」と聞くと、生徒は怪訝そうな表情をする。クラスに一人くらい「ひょっとして、左右逆ですか？」と恐る恐る答える生徒がいるので、「正解！」と褒めてあげる。

そして、図2を見せて、「ごめん、実はこっちなんだよね～」と真実を伝え、底が1より小さい場合のグラフの話に繋げていく。



図2: 底が1より小さい場合

指数関数を含む不等式では「底と1との大小」が重要であり、**指数関数のグラフが不等式を解く上で欠かせない**。そのイメージを定着させる上で、「平和祈念像」はとても有効だと思う。

因みに、担任を持っていた学年の見学旅行では、生徒が平和祈念像の前で同じポーズをとって写真に収まっていた。

3 対数関数のグラフ

指数は生徒にとって馴染みがあるが、対数はとっつきづらい対象である。グラフにしても、指数関数は「倍々ゲームの感覚」があれば良いが、対数についてはピンとこない。

指数関数と対数関数は互いに逆関数なので、その観点から対数関数のグラフの導入を行った。

- (1) $y = a^x \iff x = \log_a y$ の確認
☞ x, y を入れ替えたもの
- (2) 「 x, y を入れ替えるにはどうする？」
☞ 図3を見ながら考えさせる
- (3) 「 x 軸と y 軸を入れ替えればいい！」
☞ 「じゃあ、どう操作すればいい？」
- (4) 「直線 $y = x$ に関して折り返す！」

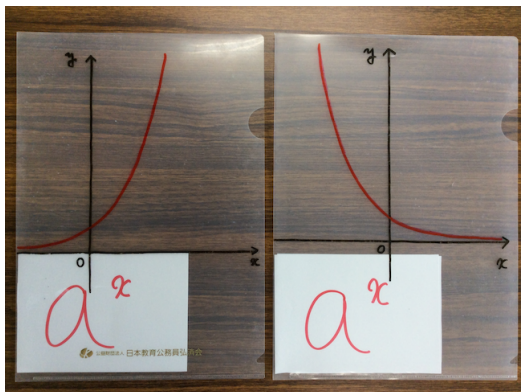


図 3: 指数関数のグラフ

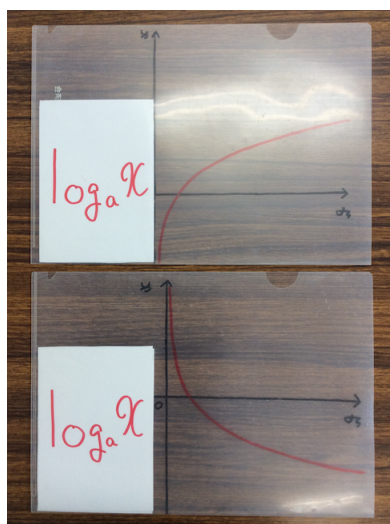


図 4: 対数関数のグラフ

「直線 $y = x$ に関して、くるりんぱ」と言いながら実際にこの操作を行い、 $y = a^x$ のグラフと $y = \log_a x$ のグラフとの対応を印象づけた。

また、グラフ同士の対応を考えることによって、**指数関数と対数関数のオーダーの違い**を意識させたい。「指数関数的」という慣用句もあるぐらい、 $y = a^x$ ($a > 1$) は $x > 0$ において急激に増加する。そして、その部分に対応する $y = \log_a x$ ($a > 1$) の $x > 1$ の部分の増加は非常に緩やかである。このことは、 $\log_{10} 1000 = 3$ などの例を出すとよく分かるが、グラフの対応を考えれば理解が増すと思う。

4 正接のグラフ

三角関数は**周期的な関数**なので、そのグラフも特徴的である。 $\sin \theta, \cos \theta$ のグラフは回転運動の各座標の動きを取り出したものとして、**紐を回しながら動きを追う**ことによってイメージさせている。また、**振動現象**と結びつけることにより、**グラフの形状が波になる**のも納得できる。

一方、 $\tan \theta$ のグラフは**異端**である。単位円の右端に直線 $x = 1$ を引き、動径の延長との交点を考えて $\tan \theta$ の値は視覚化できるが、 $\sin \theta, \cos \theta$ のような「しっくり感」はない。

筆者は $\tan \theta$ のグラフについて、「**仏像が沢山並んでいる**」イメージを持っているので、それで指導してきていた。



図 5: 吉祥天立像

そんな筆者は4年前、夏季セミナーに参加できなかったのですが、研究会当日の様子を知ろうと「数学のいずみ」にアクセスした際、次の画像を見て「**やられた!**」と思った。



図 6: きりんさん・・・

さすが大谷先生である。

授業を受けた生徒はというと、全体的に「やや押しつけかな～」という雰囲気、気のいまいちな反応でしたが、「先生のおかげで $\tan x$ のグラフがわかったよ」と、うそぶいてくれる生徒もいました。

との記述が [3] にあるが、生徒たちは（大谷先生の印象よりも）楽しく授業を受けたと思う。

5 正弦のグラフ

$\sin \theta$ のグラフに関して、小ネタを 2 つ。

例 1 身の回りに現れる正弦曲線として、「服の型紙」, 「魚肉ソーセージの切断」, 「桂剥き」がある。「服の型紙」と「魚肉ソーセージの切断」は教室ですぐ見せられる。



図 7: 桂剥き

図 7 の「桂剥き」は、当時の家庭科の先生にお願いしたものである。

例 2 $a \sin \theta + b \cos \theta$ の合成結果が正弦のみで表せることに、ピンとこない生徒も多い。

そこで、合成結果が正弦になることを納得してもらおうと作成したのが図 8 の教具である。

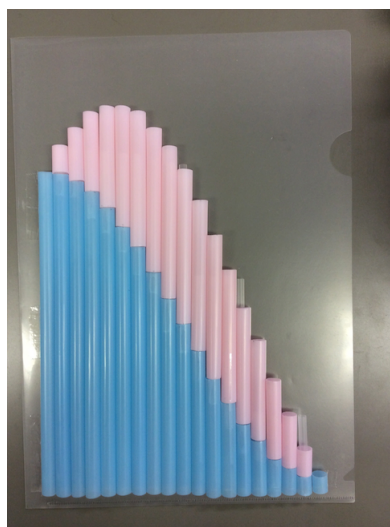


図 8: ストローで合成を体感

水色のストローにピンク色のストローをくっつけていくと、確かに正弦曲線（つぼく）になる。

6 ICT の活用

iPad ではサウンド関係のアプリが充実している。そこで、iPad とプロジェクタを教室に持ち込んで行った実践を 2 つ紹介したい。

例 3 「FreqCounter」はオシロスコープの機能をもったアプリである。音叉や筆者の声をマイクを通して認識させ、波形を表示した。

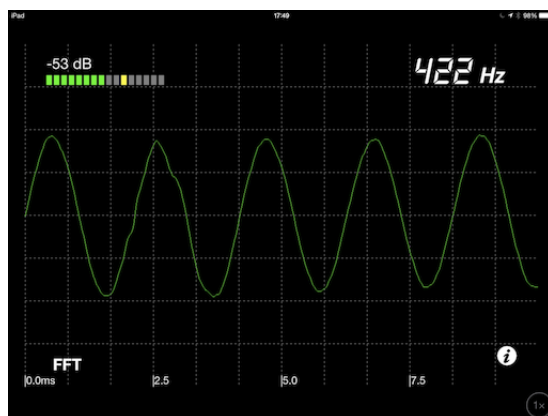


図 9: 筆者の声の波形

また、アプリ「耳年齢チェック！」を利用してモスキート音を発生させ、**高周波の音**について体感させた。

- (1) 周波数を徐々に上げていく
- (2) 聴こえるかどうか生徒に確認
- (3) オシロスコープで音が出ているか確認
嘘はいけませんよ！

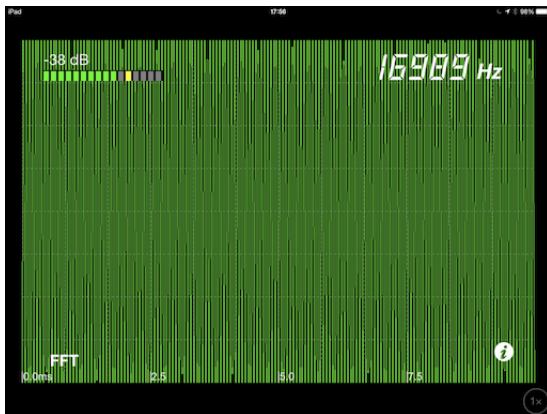


図 10: モスキート音の波形

例4 波形編集アプリの「Hokusai2」は、元の波形に対して**逆位相の波形**を生成することができる。生徒には、

- (1) 「振幅は音の大きさに対応します！」
 - (2) 「では、上下反転した波形を合成したら？」
 - (3) 「(自信なさげに) 音が聴こえない...？」
- と確認した上で、アプリを使い実演を行った。

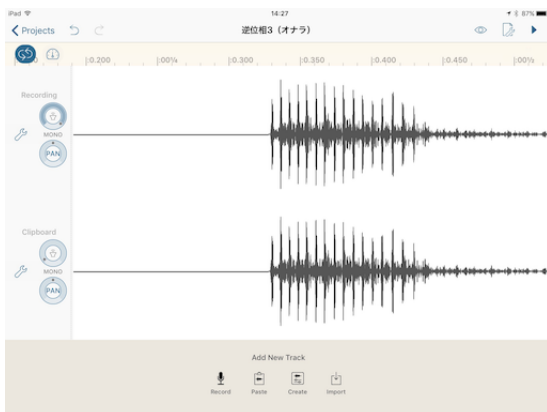


図 11: オナラの波形



図 12: オナラの波形の拡大

「**オナラの音源**」を調達し、アプリで逆位相にした波形も用意しておく。同時に再生し、逆位相にした波形の音量を上げていくと音が聴こえなくなる。「**高級なヘッドホンの原理だ！**」と言いつける生徒もいる。

7 終わりに

関数を視覚的に捉えるために、グラフは「**なくてはならないツール**」である。本来、生徒達の理解のサポート役になるべき存在であるが、そうになっていない感じを受ける。

そこで、彼らにグラフに対して、

- 親しみをもたせ
- 形状を印象深いものにする

ために行った実践を紹介した。

これからも、「**アソビ感覚**」を大事にしつつ、生徒と楽しく数学を学んでいきたい。

参考文献等

- [1] 長尾良平「関数のグラフで One more thing」
第 106 回数学教育実践研究会レポート
- [2] 大谷健介
「『ボディパラ』を真似て – 番外レポート –」
第 77 回数学教育実践研究会レポート
- [3] 大谷健介「グラフの印象を押し売りする」
第 90 回数学教育実践研究会レポート