第104回数学教育実践研究会　レポート発表

いろんな極限でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

平成30年1月27日　ニッセイMKビル

1　はじめに

数学IIIの主役は微分・積分である．その前段として, 数列・関数の極限を扱うが, メインではなく, **さらっと扱って終わり**にすることも多いだろう．しかし, **ちょっと掘り下げれば楽しめる**内容もある．本レポートでは, それらについての実践を紹介していきたい．

2　関数の極限

高校数学では, 数列・関数の極限については**直感的に扱う**ものとされている．したがって,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

とは,
「xを限りなくaに近づける時, $f(x)$が限りなくαに近づくこと」と**説明**される．

$\varepsilon-\delta$論法の**雰囲気だけでも味わって**欲しいなあと思い, **某ドラマに準えて定式化**してみた．

極限のイメージ

上司：「君, $f(x)$とαとの距離をε未満にしたまえ！」
部下：「御意！ xとaとの距離をδ未満にすれば大丈夫です！」

この会話が, **どんな**$\varepsilon>0$に対しても成り立つとき,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$$

である．

例1　$\displaystyle\lim_{x\to 1} x^2 = 1$について．

上司：「君, $|x^2-1| < \dfrac{1}{100}$にしたまえ！」

部下：「御意！ $|x-1| < \dfrac{1}{300}$なら大丈夫です！」

実際,

$$\begin{aligned} |x^2-1| &= \left|\{(x-1)+1\}^2-1\right| \\ &= \left|(x-1)^2+2(x-1)\right| \\ &\leqq |x-1|^2+2|x-1| \end{aligned}$$

ここで, $0<|x-1|<1$より$|x-1|^2<|x-1|$だから

$$\begin{aligned} |x^2-1| &< |x-1|+2|x-1| \\ &= 3|x-1| \\ &< 3\cdot\frac{1}{300} = \frac{1}{100} \end{aligned}$$

同様に, $|x^2-1|<\varepsilon$にしたければ, $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$にすれば良い（$\varepsilon \geqq 3$のときは, $\delta=1$で大丈夫）．

このようにして, xを1に十分近づけることによって, x^2がいくらでも1に近づけられることを**実感させる**ことが大切だと思う．

3　関数の連続性

関数の連続性も生徒にとっては, 掴みにくい概念かもしれない．素朴には, 言葉の響きからして,「関数$y=f(x)$が$x=a$で**連続**」とは「$y=f(x)$の**グラフが**$x=a$で**繋がっている**こと」とするのが良さそうではある．しかし,

- グラフは, 全ての実数 x に対してきちんと点を打っている訳ではない
- 視力によって連続かどうか変わる？
  ☜ 授業では, 最後列の生徒を指名して意地悪な質問をする.

という**ツッコミどころ**があるので, 結局のところは「繋がっているグラフのイメージ」を大切にしつつ, 「関数 $y = f(x)$ が $x = a$ で連続」とは

- $x = a$ は $f(x)$ の定義域に含まれていて
- $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x)$ が存在して
- $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ が成り立つ

という定義に落ち着くことになる. 筆者は, [3] にある**「近づくものを近づくものに移す」**, 若しくは標語的に**「近くを近くに移す」**ということを授業では強調している.

4　ニュートン法

「ニュートン法」は**単純なアルゴリズムだが収束が速い**ので, 方程式の近似解を求める際によく用いられる方法である. 授業では, 収束の速さについても触れてみた.

例 2　$\sqrt{2}$ の近似値を求めたい.

$f(x) = x^2 - 2$ 上の点 $(a, a^2 - 2)$ での接線の方程式は, $f'(a) = 2a$ より

$$\begin{aligned} y &= 2a(x - a) + a^2 - 2 \\ &= 2ax - a^2 - 2 \end{aligned}$$

となる. この接線と x 軸との共有点の x 座標は方程式

$$2ax - a^2 - 2 = 0$$

の解であり,

$$x = \frac{a^2 + 2}{2a} = \frac{a}{2} + \frac{1}{a}$$

となる. この操作を繰り返すことによって, 漸化式

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{{x_n}^2 + 2}{2x_n} \\ &= \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \end{aligned}$$

が得られる. $x_1 = \dfrac{3}{2}$ とすると

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{17}{12} = 1.\underline{41}66\ldots \\ x_3 &= \frac{17}{24} + \frac{12}{17} = \frac{577}{408} = 1.\underline{41421}5\ldots \\ x_4 &= \frac{577}{816} + \frac{408}{577} = \frac{665857}{470832} = 1.\underline{41421356237}4\ldots \end{aligned}$$

となり, x_4 で小数第 11 位まで一致する.

手計算でこれだけの精度が出るのは驚きである. そこで, 誤差の評価をしてみよう.

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \sqrt{2}| &= \left| \frac{{x_n}^2 + 2}{2x_n} - \sqrt{2} \right| \\ &= \left| \frac{{x_n}^2 - 2\sqrt{2}x_n + 2}{2x_n} \right| \\ &= \left| \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2x_n} \right| \end{aligned}$$

初期値 x_1 を $x_1 > 1$ にとると, 帰納的に $x_n > 1$ なので, $2x_n > 2$ より $\dfrac{1}{2x_n} < \dfrac{1}{2}$ が分かり,

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| < \frac{1}{2}|x_n - \sqrt{2}|^2 \cdots (※)$$

が成り立つ.

例 3　近似精度について

(1) x_2 と $\sqrt{2}$ との誤差について

$$\begin{array}{ccl} x_1 & = & 1.50 \\ \sqrt{2} & = & 1.41\ldots \\ \hline x_1 - \sqrt{2} & \fallingdotseq & 0.09\ldots < \dfrac{1}{10} \end{array}$$

このとき,

$$\begin{aligned} |x_2 - \sqrt{2}| &< \frac{1}{2}|x_1 - \sqrt{2}|^2 \\ &< \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{200} \text{のはず} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} x_2 & = & 1.4166\ldots \\ \sqrt{2} & = & 1.4142\ldots \\ \hline x_2 - \sqrt{2} & \fallingdotseq & 0.002\ldots < \dfrac{3}{10^3} \end{array}$$

$\dfrac{3}{10^3} < \dfrac{1}{200}$ より, 誤差予測は正しい.

(2) x_3 と $\sqrt{2}$ との誤差について

(1) の結果を受けて,

$$\begin{aligned} |x_3 - \sqrt{2}| &< \frac{1}{2}|x_2 - \sqrt{2}|^2 \\ &< \frac{1}{2}\left(\frac{3}{10^3}\right)^2 = \frac{9}{2000000} \text{のはず} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} x_3 & = & 1.4142156\ldots \\ \sqrt{2} & = & 1.4142135\ldots \\ \hline x_3 - \sqrt{2} & \fallingdotseq & 0.0000021\ldots < \dfrac{3}{10^6} \end{array}$$

$\dfrac{3}{10^6} < \dfrac{9}{2000000}$ より, 誤差予測は正しい.

この計算例からも, 「評価式 (※) の右辺において **2 乗がかかっている**」ことにより, 急速に極限値に近づくことが分かる.

5　紙の 3 等分

第 94 回の数実研で, 芳賀先生が折り紙について講演 [4] をされたが, 手順に従って紙を折ることによって, 近似的に紙を 3 等分する方法（藤本修三氏による**「漸近等分法」**）の話が印象に残っている.

漸近等分法

紙を長方形 ABCD と見立てて,

(1) 辺 AB 上に点 P_1 をとる

(2) 線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{B}$ の中点 P_2 をとる

(3) 線分 AP_2 の中点 P_3 をとる

(4) 線分 $\mathrm{P}_3\mathrm{B}$ の中点 P_4 をとる

⋮

この手順を繰り返すことにより, P_n は辺 AB を 1 : 2 または 2 : 1 に内分する点に近づく

「面白い！」と思ったので, 作業を取り入れながら次のような流れで授業を行った.

(1) **（3 等分とは知らせずに）**手順を説明

(2) 手順を実行して, 近くの生徒と結果の確認

(3) 次の 2 点に気づかせる

- **最初の折り幅によらずに結果が同じ**
- **3 等分っぽい**こと

(4) 何故 3 等分になるのか考えさせる

生徒の考察は以下の通りである.

解 1　$\mathrm{AB} = 1$ とし, n 回目に紙を折ってできた AB 上の点を P_n とする. $x_1 = \mathrm{AP}_1$ のとき,

$$\begin{aligned} x_2 &= \mathrm{P_2B} = \frac{1 - x_1}{2} \\ x_3 &= \mathrm{AP_3} = \frac{1 - x_2}{2} \\ x_4 &= \mathrm{P_4B} = \frac{1 - x_3}{2} \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = \mathrm{AP}_n \ (\text{若しくは } \mathrm{P}_n\mathrm{B}) = \frac{1 - x_n}{2}$$

となるので, 2 項間漸化式

$$x_{n+1} = -\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}$$

を得る. この漸化式は

$$x_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(x_n - \frac{1}{3}\right)$$

と変形できるので, その一般項は

$$x_n = \frac{1}{3} + \left(x_1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる. したがって, 手順を繰り返すことによって

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \frac{1}{3}$$

となり, x_1（つまり P_1 の場所）によらずに, 3 等分の位置に近づく.

解 2　解 1 の過程を x_1 の式で表して処理すると,

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1-x_1}{2} \\
x_3 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1-x_1}{2}\right) = \frac{x_1+1}{4} \\
x_4 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x_1+1}{4}\right) = \frac{3-x_1}{8} \\
x_5 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{3-x_1}{8}\right) = \frac{x_1+5}{16} \\
x_6 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{x_1+5}{16}\right) = \frac{11-x_1}{32} \\
x_7 &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{11-x_1}{32}\right) = \frac{x_1+21}{64} \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

であり, A と P_n の距離である $x_1, x_3, x_5, x_7, \ldots$ だけを取り出してみると

$$x_1, \frac{x_1+1}{4}, \frac{x_1+5}{16}, \frac{x_1+21}{64}, \ldots$$

となる. 改めて $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$ とおくと

$$\text{分子} = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 4^{k-1} = x_1 + \frac{1}{3}(4^{n-1}-1)$$

と 分母 $= 4^{n-1}$ より

$$y_n = \frac{1}{4^{n-1}} \cdot \left(x_1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}$$

が導かれる．よって, $n \to \infty$ としたときの極限値は $\frac{1}{3}$ である.

解 3　$\mathrm{AB}=1$ とし, n 回目に紙を折ってできた AB 上の点を P_n とする．$z_1 = \mathrm{AP}_1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
z_2 = \mathrm{AP}_2 &= \frac{1}{2}\left(z_1 + \frac{1-z_1}{2}\right) = \frac{z_1+1}{4} \\
z_3 = \mathrm{AP}_3 &= \frac{1}{2}\left(z_2 + \frac{1-z_2}{2}\right) = \frac{z_2+1}{4} \\
&\ \vdots \\
z_{n+1} = \mathrm{AP}_n &= \frac{1}{2}\left(z_n + \frac{1-z_n}{2}\right) = \frac{z_n+1}{4}
\end{aligned}
$$

となるので, 2 項間漸化式

$$z_{n+1} = \frac{1}{4}z_n + \frac{1}{4}$$

を得る．この漸化式は

$$z_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\left(z_n - \frac{1}{3}\right)$$

と変形できるので, その一般項は

$$z_n = \frac{1}{3} + \left(z_1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

となる．よって, $n \to \infty$ としたときの極限値は $\frac{1}{3}$ である.

授業では図形の復習も兼ねて, **（近似的にではなく）本当に 3 等分する折り方**を生徒に考えさせた. 生徒には,

(1) **3 回**でいけるよ！

(2) 3 等分から連想して, **2 : 1** とか・・・

とヒントを小出しに与えた.
生徒の解答は, 次の 4 通りである.

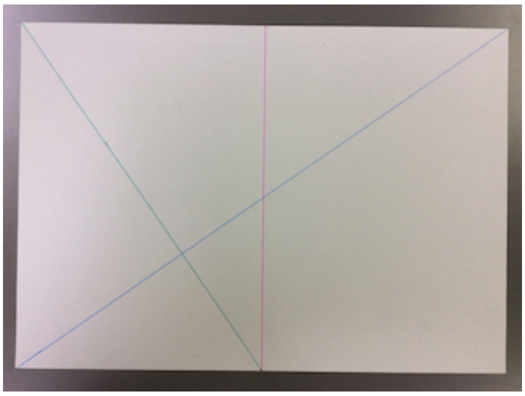

図 1: 相似な三角形を構成（その 1)

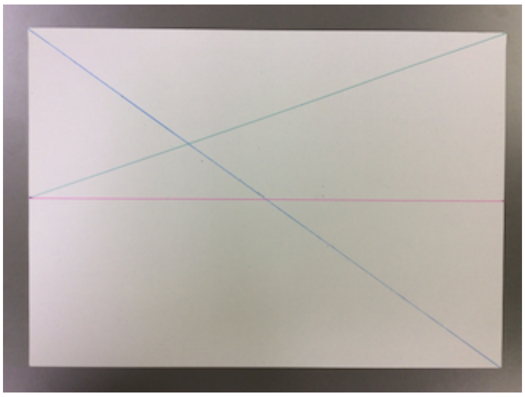

図 2: 相似な三角形を構成（その 2)

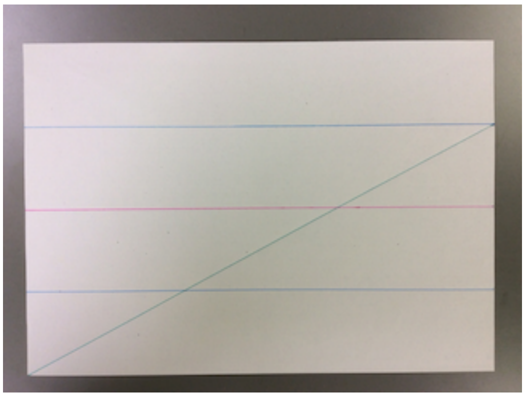

図 3: 相似な三角形を構成（その 3）

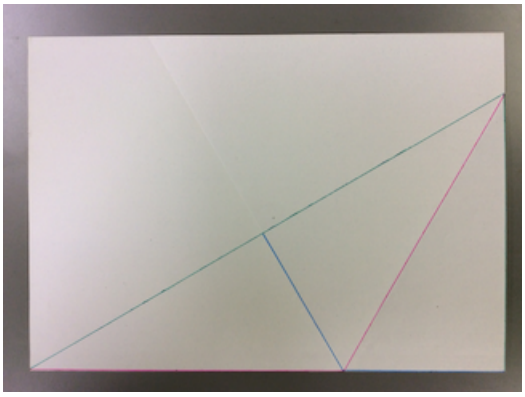

図 4: 角の二等分線の性質を利用

この題材から, 数列の極限の学習をスタートさせるのも良いと思う.

6　はさみうちの原理

極限の話のまとめに, **挑戦しがいのある問題**を探していたところ, 木村先生の問題 [7] に辿り着いた. 生徒に問題を配布し, 解答期限を 1 週間としたところ, 2 日で正答を導いた生徒が現れた.

木村先生の問題

n を 2 以上の自然数とし, 集合 A_n を $A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ により定める. A_n の相異なる 2 つの要素 x, y について, 積 xy の下一桁が 1 となるような組合せの総数を a_n とおく. 例えば, $a_2 = 0, a_7 = 1, a_{19} = 5$ である.

(1) a_{10}, a_{100} を求めよ

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \log_n a_n$ を求めよ

生徒の解答

(1) 2 数の積の下 1 桁が 1 となるのは, 1 の位の組合せが

① 1 と 1

② 3 と 7

③ 9 と 9

となるときである.

$A_{10} = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ において,

①であるものは 0 個
②であるものは 1 個
③であるものは 0 個

よって, $a_{10} = 1$

$A_{100} = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ において,

①であるものは ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ 個
②であるものは $10 \times 10 = 100$ 個
③であるものは ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ 個

よって, $a_{100} = 190$

(2) $A_{10^k} = \{1, 2, 3, \ldots, 10^k\}$ において（$k \in \mathbf{N}$）,

①であるものは
${}_{10^{k-1}}\mathrm{C}_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 10^{k-1} \cdot (10^{k-1} - 1)$ 個
②であるものは $10^{k-1} \times 10^{k-1} = 10^{2k-2}$ 個
③であるものは
${}_{10^{k-1}}\mathrm{C}_2 = \dfrac{1}{2} \cdot 10^{k-1} \cdot (10^{k-1} - 1)$ 個

よって, $a_{10^k} = 10^{k-1} \cdot (2 \cdot 10^{k-1} - 1)$ である.

次に, 2 つの自然数 p, q に対して, $p < q$ なら $a_p \leqq a_q$ であり, $n \geqq 10$ で

$$10^k \leqq n < 10^{k+1}$$

を満たす k が存在することから,

$$a_{10^k} \leqq a_n \leqq a_{10^{k+1}}$$

ならば

$$\log_{10} a_{10^k} \leqq \log_{10} a_n \leqq \log_{10} a_{10^{k+1}}$$

が成り立つ．このことと，

$$\frac{1}{k+1} < \frac{1}{\log_{10} n} \leqq \frac{1}{k}$$

より

$$\frac{\log_{10} a_{10^k}}{k+1} < \frac{\log_{10} a_n}{\log_{10} n} < \frac{\log_{10} a_{10^{k+1}}}{k}$$

が成り立つ．左辺と右辺については，

$$\begin{aligned}
\text{左辺} &= \frac{\log_{10} 10^{k-1}\cdot(2\cdot 10^{k-1}-1)}{k+1}\\
&= \frac{\log_{10} 10^{2k-2}\cdot\left(2-\dfrac{1}{10^{k-1}}\right)}{k+1}\\
&= \frac{2k-2+\log_{10}\left(2-\dfrac{1}{10^{k-1}}\right)}{k+1}\\
&= \frac{2-\dfrac{2}{k}+\dfrac{\log_{10}\left(2-\dfrac{1}{10^{k-1}}\right)}{k}}{1+\dfrac{1}{k}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{右辺} &= \frac{\log_{10} 10^{k}\cdot(2\cdot 10^{k}-1)}{k}\\
&= \frac{\log_{10} 10^{2k}\cdot\left(2-\dfrac{1}{10^{k}}\right)}{k}\\
&= \frac{2k+\log_{10}\left(2-\dfrac{1}{10^{k}}\right)}{k}\\
&= 2+\frac{\log_{10}\left(2-\dfrac{1}{10^{k}}\right)}{k}
\end{aligned}$$

と変形できる．

$n\to\infty$ のとき，$k\to\infty$ となり，

$$\lim_{k\to\infty}(\text{左辺}) = 2\ ,\ \lim_{k\to\infty}(\text{右辺}) = 2$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\log_n a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\log_{10} a_n}{\log_{10} n} = 2$$

が示される．

授業では，解答を提出した生徒に黒板を使って説明してもらった．説明を受けた生徒は**数式に圧倒されつつも，「スゴイ！」と自然に拍手**が起こっていた．

別紙に，他の生徒の解答（異なる発想による）の不備を修正したものと筆者が作成した解答（生徒の解答例と発想は同じ）を載せた．

7　終わりに

冒頭でも触れたが，「極限」は

- 「直感的な扱い」にならざるを得ない
- 「深みに嵌る」可能性がある

ため，「さらっと扱って」というのも致し方ないのかもしれない．しかし，**計算練習とは少し異なるものを取り入れる**ことによって，生徒の興味を引くことができ，理解度も深まると考える．

本実践では，過去の数実研の講演・発表を参考にさせていただいた．菅原先生がよく言われる**「アイディアの相乗り」**である．筆者はこれまでも，何回か「相乗り」をさせてもらっている．芳賀先生，木村先生にはお礼を申し上げたい．

参考文献等

[1] 森毅「現代の古典解析」 ちくま学芸文庫

[2] 田島一郎「解析入門」 岩波書店

[3] 志賀浩二「位相への 30 講」 朝倉書店

[4] 芳賀雪枝「紙を折る」
第 94 回数学教育実践研究会講演

[5] 藤原啓明「紙の n 等分について」数研通信 75 号

[6] トーマス・ハル「ドクター・ハルの折り紙数学教室」 日本評論社

[7] 木村郁夫「数学 III C（数列の極限）の授業実践について」第 77 回数学教育実践研究会レポート

「はさみうちの原理」の挑戦問題（解答編）

問　n を 2 以上の自然数とし，集合 A_n を $A_n=\{1,2,3,\ldots,n\}$ により定める．A_n の相異なる 2 つの要素 x,y について，積 xy の下一桁が 1 となるような組合せの総数を a_n とおく．

(1) a_{10}, a_{100} を求めよ．　　$a_{10}=1, a_{100}=190$

(2) $\lim_{n\to\infty}\log_n a_n$ を求めよ．

【解 1】

1〜n で，特に $n=10k$ の時を考える．x,y の順で，組合せの総数を場合分けして考えると，

一の位で 1×1 : $(k-1)+(k-2)+\ldots+3+2+1=\dfrac{1}{2}k(k-1)$ 個

一の位で 3×7 : $k+(k-1)+\ldots+3+2+1=\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 個

一の位で 7×3 : $(k-1)+(k-2)+\ldots+3+2+1=\dfrac{1}{2}k(k-1)$ 個

一の位で 9×9 : $(k-1)+(k-2)+\ldots+3+2+1=\dfrac{1}{2}k(k-1)$ 個

となるので，$a_{10k}=\dfrac{1}{2}k(4k-2)=k(2k-1)$ となる．

n が m 桁の自然数の時，$10^{m-1}\leqq n<10^m$ が成り立ち

$$a_{10^{m-1}}=a_{10\cdot10^{m-2}}=10^{m-2}\cdot(2\cdot10^{m-2}-1)$$
$$a_{10^m}=a_{10\cdot10^{m-1}}=10^{m-1}\cdot(2\cdot10^{m-1}-1)$$

よって，

$$10^{m-2}\cdot(2\cdot10^{m-2}-1)\leqq a_n<10^{m-1}\cdot(2\cdot10^{m-1}-1)$$

が得られる．

さらに，$10^{m-2}<2\cdot10^{m-2}-1$ と $2\cdot10^{m-1}-1<2\cdot10^{m-1}$ が成り立つので，

$$10^{m-2}\cdot10^{m-2}<a_n<10^{m-1}\cdot2\cdot10^{m-1}$$

$$10^{2m-4}<a_n<2\cdot10^{2m-2}$$

が得られる．各辺の常用対数を考えると，

$$\log_{10}10^{2m-4}<\log_{10}a_n<\log_{10}2\cdot10^{2m-2}$$

$$2m-4<\log_{10}a_n<\log_{10}2+(2m-2)\cdots①$$

が成り立つ．また，$10^{m-1}\leqq n<10^m$ より，$m-1\leqq\log_{10}n<m$ となり，$m\geqq2$ のとき，逆数を考えて

$$\frac{1}{m}<\frac{1}{\log_{10}n}\leqq\frac{1}{m-1}\cdots②$$

が得られる．

①と②の辺々を掛け合わせて，

$$\frac{2m-4}{m}<\frac{\log_{10}a_n}{\log_{10}n}<\frac{\log_{10}2+(2m-2)}{m-1}$$

$n\to\infty$ のとき，$m\to\infty$ であり，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2m-4}{m}=\lim_{m\to\infty}\left(2-\frac{4}{m}\right)=2$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\log_{10}2+(2m-2)}{m-1}=\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\log_{10}2}{m-1}+2\right)=2$$

となるので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\log_n a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_{10}a_n}{\log_{10}n}=2$$

【解２】

$n=10k$ と表されるときをまず考える．具体的に $1\sim40$（つまり，$k=1,2,3,4$）で数え上げてみると・・・(表の中の数が k)

一の位で 1×1：

	1	11	21	31
1		2	3	4
11			3	4
21				4
31				

一の位で 3×7：

	7	17	27	37
3	1	2	3	4
13		2	3	4
23			3	4
33				4

一の位で 7×3：

	3	13	23	33
7		2	3	4
17			3	4
27				4
37				

一の位で 9×9：

	9	19	29	39
9		2	3	4
19			3	4
29				4
39				

よって，k が1増える毎に，$(k-1)+k+(k-1)+(k-1)=4k-3$ 個増えるので，$n=10m$ のとき，

$$a_n=a_{10m}=\sum_{k=1}^{m}(4k-3)=2m^2-m$$

となる．

次に，n が任意の自然数のとき，$10m\leqq n<10(m+1)$ を満たす m が存在し，

$$a_{10(m+1)}=2(m+1)^2-(m+1)=2m^2+3m+1$$

だから，

$$2m^2-m\leqq a_n<2m^2+3m+1$$

$$m^2<2m^2-m\leqq a_n<2m^2+3m+1<3m^2\quad(m\geqq4)$$

が得られる．常用対数を考えると，

$$\log_{10}m^2<\log_{10}a_n<\log_{10}3m^2$$

$$2\log_{10}m<\log_{10}a_n<2\log_{10}m+\log_{10}3\quad\cdots①$$

また，$10m\leqq n<10(m+1)$ でも常用対数を考えると

$$\log_{10}10m\leqq\log_{10}n<\log_{10}10(m+1)$$

$$1+\log_{10}m\leqq\log_{10}n<1+\log_{10}(m+1)$$

逆数を考えて，

$$\frac{1}{1+\log_{10}(m+1)}<\frac{1}{\log_{10}n}\leqq\frac{1}{1+\log_{10}m}\quad\cdots②$$

①と②の辺々を掛け合わせて，

$$\frac{2\log_{10}m}{1+\log_{10}(m+1)}<\frac{\log_{10}a_n}{\log_{10}n}<\frac{2\log_{10}m+\log_{10}3}{1+\log_{10}m}$$

$n\to\infty$ のとき，$m\to\infty$ であり，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2\log_{10}m}{1+\log_{10}(m+1)}=\lim_{m\to\infty}\frac{2\cdot\dfrac{\log_{10}m}{\log_{10}(m+1)}}{\dfrac{1}{\log_{10}(m+1)}+1}=\frac{2}{1}=2$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2\log_{10}m+\log_{10}3}{1+\log_{10}m}=\lim_{m\to\infty}\frac{2+\dfrac{\log_{10}3}{\log_{10}m}}{\dfrac{1}{\log_{10}m}+1}=\frac{2}{1}=2$$

となるので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty}\log_n a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_{10}a_n}{\log_{10}n}=2$$

※ $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\log_{10}m}{\log_{10}(m+1)}=1$ の証明

$$\frac{\log_{10}m}{\log_{10}2m}<\frac{\log_{10}m}{\log_{10}m\left(1+\dfrac{1}{m}\right)}=\frac{\log_{10}m}{\log_{10}(m+1)}<\frac{\log_{10}(m+1)}{\log_{10}(m+1)}=1\quad(m\geqq2)$$

であり，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\log_{10}m}{\log_{10}2m}=\lim_{m\to\infty}\frac{\log_{10}m}{\log_{10}m+\log_{10}2}=\lim_{m\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\log_{10}2}{\log_{10}m}}=\frac{1}{1}=1$$

なので，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\log_{10}m}{\log_{10}(m+1)}=1$$

が成り立つ．