第102回数学教育実践研究会　レポート発表

2次導関数でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

平成29年8月5日　小樽桜陽高等学校

1　はじめに

前回の数実研では, 微分を「正比例」の観点で取り扱った例を [1] で紹介した. 筆者は, 2次導関数についてはオーソドックスに扱ってきたが, [2][3] で2次導関数・2階微分を取り上げている部分があり, 以前から授業で扱えないか考えていた. 本レポートでは, その実践を紹介したい.

2　極値との関わり

例1　関数 $f(x)$ に対し, 2次関数 $g(x)$ を次の関係を満たすように定めよ.

$$g(a)=f(a)\ ,\ g'(a)=f'(a)\ ,\ g''(a)=f''(a)$$

$g(x)=px^2+qx+r$ とおくと, 条件より

$$\begin{aligned} g(a)&=pa^2+qa+r=f(a) & \cdots ① \\ g'(a)&=2pa+q=f'(a) & \cdots ② \\ g''(a)&=2p=f''(a) & \cdots ③ \end{aligned}$$

が成り立つ. ③→②→①の順に計算を進めて,

$$p=\frac{f''(a)}{2}\ ,\ q=f'(a)-f''(a)a$$

$$r=f(a)-f'(a)a+\frac{f''(a)}{2}a^2$$

となるので,

$$g(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

を得る.

特に, $f'(a)=0$ のときは,

$$g(x)=f(a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

となり, $g(x)$ のグラフは $(a,f(a))$ を頂点とする放物線となる. 従って, $f(x)$ のグラフは**点 $(a,f(a))$ の十分近くでは放物線と見なす**ことができ, **増減は2次の項の係数の符号**で決まる.

よって, $f'(a)=0$ のとき

- $f''(a)>0$ ならば, $f(x)$ は $x=a$ で極小
- $f''(a)<0$ ならば, $f(x)$ は $x=a$ で極大

が言える.

例2　関数 $f(x)=x^3-3x$ を近似する2次関数を考えよ.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$ となるので, $f'(x)=0$ の解は $x=\pm1$. 次に $f''(x)=6x$ より, $f''(1)>0, f''(-1)<0$ となる. よって $f(x)$ は

- $x=1$ の近くでは, $g_1(x)=3(x-1)^2-2$
- $x=-1$ の近くでは, $g_2(x)=-3(x+1)^2+2$

で近似される.

教科書では, 極値をとる条件について「$f'(x)$ の増減を $f''(x)$ の符号の変化で捉える」ことで証明しているが, 生徒は「$f''(a)>\mathbf{0}$ より, $f(x)$ は $x=a$ で**極大**」としがちである.「放物線で近似している」という説明を加えることで, このようなミスは防ぐことができ, また接線（1次近似）よりも**「近似感」が味わえる**と考える.

3 運動方程式との関わり

ニュートンの運動方程式 $F = ma$ は, 加速度 a が位置 x の時刻 t による 2 階微分であることから,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

と表される.

物理の授業で単振動の学習に入っていたので, 題材として「バネの振動」を選び, **「問いの答えは数式が教えてくれる」**という流れで授業を行ってみた.

例 3 バネに錘をぶら下げて振動させる. いま, その**錘の重さを 4 倍のものに変えたら**, バネの上下動の回数はどうなるか予想しよう？

簡略化のために, 重力の影響は無視して, バネの復元力のみで考える. フックの法則よりバネの伸び x に比例して復元力 $-kx$ がかかる.

$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx$ の解として, （これまた簡略化のために）$x = A\sin\omega t$ を考えると,

$$\frac{dx}{dt} = A\omega\cos\omega t\ ,\ \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\omega t$$

となるので,

$$-mA\omega^2\sin\omega t = -kA\sin\omega t$$

が成り立ち, $-mA\omega^2 = -kA$ より $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$.

従って,

$$\text{周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\text{振動数 } f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

となるので, 重さが 4 倍になれば, 上下動の回数は $\dfrac{1}{\sqrt{4}} = \dfrac{1}{2}$ 倍, つまり半分になる（筈である）.

計算で予想した後, 実際にバネの上下動の回数を数えてみると, 確かに重さを 4 倍にした方が元の時より約半分に減ることが確認できた.

生徒に考えさせる際, 惑わすように自分が色々呟いたせいか, 正答率はかなり低かった（笑）.

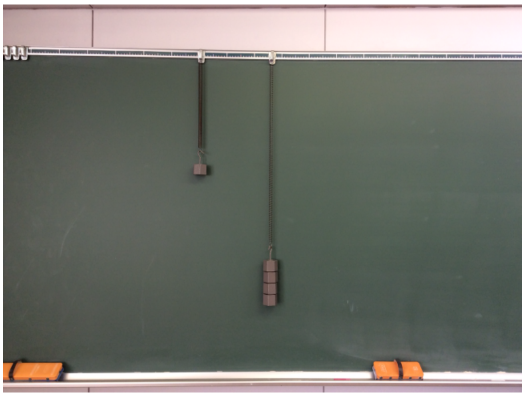

図 1: カウントしました

4 終わりに

前半の内容は関数の近似の話であり, 大学で学ぶ**テイラー展開へも繋がる**内容である. 教科書では発展扱いで「2 次の近似式」が紹介されているが, 積極的に取り上げてよい内容だと考える.

後半の内容は本多先生の講演 [4] で取り上げられた**「ゴムの振動実験」の話**に触発されて, 昨年度の実践をレポートにまとめたものである. 先生の講演は, バネの実験を行った筆者にとっては非常に共感できる内容であり, 終始頷きながらメモを取っていた. 正しい定式化を行えば**「答えは式が教えてくれる」**というのは,

(1) 現実問題をモデリング

(2) 数式にして解を予測

(3) 実験にて検証

という数学的探究活動の例であり, 大事にしたい活動の 1 つである.

高次導関数についての活用例をこれからも積極的に授業で扱っていきたい.

参考文献等

[1] 長尾良平「理系の微分で One more thing」第 101 回数学教育実践研究会レポート

[2] 森毅「現代の古典解析」 ちくま学芸文庫

[3] 黒田他「高等学校の微分・積分」ちくま学芸文庫

[4] 本多尚文「数学の楽しさを伝えるということ」第 101 回数学教育実践研究会　講演