第101回数学教育実践研究会　レポート発表

文系の微分でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

平成29年6月3日　北海道大学情報教育館

1　はじめに

数学IIの微分・積分の発展として, 2年生の終わりに少しだけ数学IIIの微分を扱った（文系・理系ともに）. その際, 文系の授業では**生徒のやる気を維持**するために,

- 数学IIIを学ぶことの良さ
- 少し進んだ数学への興味

を生徒達が感じられるように意識した. その実践を紹介していきたい.

2　微分する？ しない？

数学IIIの知識が無くても解けるが, 有れば解法の幅が広がる問を扱った.

問1　$y = \dfrac{x}{x^2+1}$ のとり得る値の範囲を求めよ.

【解1：数学III使用】

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1\cdot(x^2+1)-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{-(x^2-1)}{(x^2+1)^2} = -\frac{(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$y'=0$ とおくと $x=\pm 1$. 増減表を書くと,

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$

また, $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$ となるので, とり得る値の範囲は, $-\dfrac{1}{2} \leqq y \leqq \dfrac{1}{2}$ である.

【解2：数学III不使用】

y が k という値をとるとき,

$$\frac{x}{x^2+1} = k$$

を満たす実数 k が存在する. 分母を払って整理すると,

$$kx^2 - x + k = 0$$

(1) $k=0$ のとき
　$x=0$ となり, y は値 0 をとる.

(2) $k\neq 0$ のとき
　判別式を D とすると, $D=1-4k^2$. 実数解を持つのは $D\geqq 0$ のとき. $(2k+1)(2k-1)\leqq 0$ より, $-\dfrac{1}{2}\leqq k<0, 0<k\leqq \dfrac{1}{2}$

(1)(2) より, k すなわち y のとり得る値の範囲は, $-\dfrac{1}{2}\leqq y \leqq \dfrac{1}{2}$ である.

問2　$y = x^2 + \dfrac{2}{x}$　$(x>0)$ の最小値を求めよ.

【解1：数学III使用】

$$\begin{aligned} y' &= 2x - \frac{2}{x^2} \\ &= \frac{2x^3-2}{x^2} = \frac{2(x-1)(x^2+x+1)}{x^2} \end{aligned}$$

$y'=0$ とおくと $x=1$. 増減表を書くと,

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	3	$\nearrow$

となり, $x=1$ のとき最小値 3 となる.

【解 2：数学Ⅲ不使用】

$x^2+\dfrac{2}{x}=x^2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}$ と考え, 相加・相乗平均の不等式を使うと,

$$x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geqq 3\cdot\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3$$

等号成立は, $x^2=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$ より $x=1$ のとき. よって, $x=1$ のとき最小値 3 をとる.

【理系の生徒による別解 1】

$x^2+\dfrac{2}{x}=k$ とおき, 分母を払って $x^3+2=kx$ とする. $y=x^3+2$ と $y=kx$ のグラフの $x>0$ での共有点を考える. k が最小となるのは, $y=kx$ が接線となるときである.

曲線 $y=x^3+2$ 上の点 (t,t^3+2) での接線の方程式は, 次のようになる.

$$\begin{aligned}y&=3t^2(x-t)+t^3+2\\&=3t^2x-2t^3+2\end{aligned}$$

$y=kx$ は原点を通るので, $0=-2t^3+2$ より $t=1$. このとき, 接線は点 $(1,3)$ を通ることより $y=3x$ となる. よって, $k=3$.

以上より, $x=1$ のとき, 最小値 3 をとる.

【理系の生徒による別解 2】

$$\begin{aligned}x^2+\frac{2}{x}&=x^2-2x+2x+\frac{2}{x}\\&\geqq x^2-2x+2\cdot\sqrt{2x\cdot\frac{2}{x}}\\&=x^2-2x+4\\&=(x-1)^2+3\end{aligned}$$

2 行目で等号が成立するのは $2x=\dfrac{2}{x}$ $(x>0)$ より, $x=1$ のときである. よって, 4 行目より, $x=1$ のとき, 最小値 3 をとる.

生徒に聞いたところ, 問 1 については解 2 が, 問 2 では解 1 の支持が多かった. 問 2 では **「式変形が思いつかない・・・」** との感想が多く聞かれた.

おまけとして, 金沢大学（2009 年度：文系）の問題の一部を紹介した.

$x>0$ のとき, 不等式 $\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$ を示せ.

3　テイラー展開

数実研でも過去に複数回レポート発表がされている題材である. なるべく, 無限和になることが自然に感じられるような導入を心がけた.

まず, 多項式関数の係数について調べる.

問 3　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ の係数を決定する方法として, 次の 2 つの方法が考えられる.

(1) 異なる 4 つの x に対し, $f(x)$ の値を指定

(2) $f(0), f'(0), f''(0), f'''(0)$ の値を指定

(2) の方法を用いるとき, $f(x)$ はどのように表されるか.

解　まず, $f(0)=d$ であり, 順次微分して 0 を代入することにより a,b,c の値が定まり,

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'(0)}{1!}x+f(0)\\&=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\end{aligned}$$

を得る.

問 4　$\sin x=P(x)$ を満たす多項式関数 $P(x)$ は存在するか.

元ネタは名古屋大学（1970 年度）の「$\sin x$ は x の整式としては表せないことを示せ」である.

n 次の多項式

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$$

が存在するとして矛盾を導く.

解 1　$\sin x$ は 2π を周期とする関数なので,

$$\begin{aligned}
&P(x+2\pi)\\
&\quad = a_n(x+2\pi)^n + a_{n-1}(x+2\pi)^{n-1} + \dots\\
&\quad = a_n(x^n + 2n\pi x^{n-1} + \dots)\\
&\qquad + a_{n-1}\{x^{n-1} + 2(n-1)\pi x^{n-2} + \dots\} + \dots\\
&\quad = a_n x^n + (2n\pi a_n + a_{n-1})x^{n-1} + \dots
\end{aligned}$$

は $P(x)$ と等しくなり, x^{n-1} の係数を比較して

$$a_{n-1} = 2n\pi a_n + a_{n-1}$$

より, $a_n = 0$ を得る. これは, $P(x)$ が n 次式であることに矛盾する.

解 2　$(\sin x)^{(n+1)}$ は $\pm\sin x, \pm\cos$ の 4 つの内の何れかである. 一方, $P^{(n+1)}(x)$ は 0 となるので, 矛盾する.

解 3　まず, $\sin x$ については $|\sin x| \leqq 1$ である. 一方, $P(x)$ は

$$\begin{aligned}
|P(x)| &= |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0|\\
&= |x^n| \left| a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n} \right|\\
&\to \infty \quad (x \to \infty)
\end{aligned}$$

となるので, 矛盾する.

解 4　方程式 $\sin x = 0$ を考えると, 無限個の解 $x = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ をもつ. 一方, 方程式 $P(x) = 0$ は代数学の基本定理より, 高々 n 個の解しかもたないので矛盾する.

以上より, $\sin x$ は**単項式の有限和では表せない**ことが分かったが, **思い切って無限和で表せないか**考えてみる.

$(\sin x)^{(n)}$ の $x = 0$ での値は,

$$0 \to 1 \to 0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 0 \to -1 \to \dots$$

より,

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}
\end{aligned}$$

と表せそうである.

同様に, $(\cos x)^{(n)}$ の $x = 0$ での値は,

$$1 \to 0 \to -1 \to 0 \to 1 \to 0 \to -1 \to 0 \to \dots$$

より,

$$\begin{aligned}
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}
\end{aligned}$$

e^x については $(e^x)' = e^x$ より, $x = 0$ での値は,

$$1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to 1 \to \dots$$

より,

$$\begin{aligned}
e^x &= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}
\end{aligned}$$

と表せそうである.

ここまで来たら**もう一声**,

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \dots\\
&= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \dots\\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \dots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \dots\right)\\
&= \cos\theta + i\sin\theta
\end{aligned}$$

と**オイラーの公式**が導かれる.

$e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ との和・差を考えることにより,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\ ,\ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

が得られ, **三角関数と指数関数が「親戚関係」**にあることが分かる.

また, $\theta = \pi$ とおくことで,

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

と数学で重要な定数 $0, 1, i, \pi, e$ が入った等式が得られる.

生徒は, $\sin x, \cos x, e^x$ が**何やら整然とした式で表される**ことに興味を持ってくれた. また, $e^{i\theta}$ を書いた際には, **「そんなこと考えるの？」という一種の「どよめき」**が起こっていた.

4　終わりに

理系の生徒が少し数学Ⅲに足を突っ込むのだから, 文系の生徒も・・・. でも, 「生徒のモチベーションがなあ・・・」ということで,

- 復習的事項
  ☜ 問 1 の解 2, 問 3
- 補足的事項
  ☜ 問 2 の解 2
- 応用的事項
  ☜ 問 1・2 の解 1, 問 4
- 発展的事項
  ☜ テイラー展開

を意識的に盛り込んだ実践となった.

生徒達は筆者の意図を汲んでか, 意欲的に授業に取り組んでくれたように思う. 入試で数学Ⅲまで使わない分, 気楽に取り組めた部分もあったのかもしれない.

これからも, 生徒達が興味を持って学べる教材づくりを進めていきたい.

参考文献等

[1] 大学入試数学電子図書館
https://www.densu.jp/

[2] 「名古屋大学　数学入試問題 50 年」 聖文新社

[3] 片岸洋「オイラーの公式を教える」
第 47 回数学教育実践研究会レポート

[4] 今川直行「高次導関数の応用について」
第 73 回数学教育実践研究会レポート

[5] 安田富久一「オイラーの公式に端を発して」
第 82 回数学教育実践研究会レポート

[6] 長尾良平「理系の微分で One more thing」
第 101 回数学教育実践研究会レポート