第101回数学教育実践研究会　レポート発表

理系の微分でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

平成29年6月3日　北海道大学情報教育館

1　はじめに

高校数学の到達点の1つは「微分・積分」であるが, ややもすると**「公式適用術」的な授業**になってしまいがちである. そこで, 今まで同様に

- 補足事項を扱う
- 遊び心を入れる

ことを意識して授業を行ったので, その実践を紹介していきたい.

2　微分について

微分は**一次近似**であり, 「**虫眼鏡で接点付近を見てみる**と元の曲線と区別がつかなくなります」といった指導がよくされると思う. 筆者は虫眼鏡で拡大するのではなく, 「ギリギリまで顔を黒板に近づけて**凝視（ガン見）**する」という導入を行い, 接線を表す関数をふざけて**「ガン見関数」**（ガンマではなく）と呼んでいた.

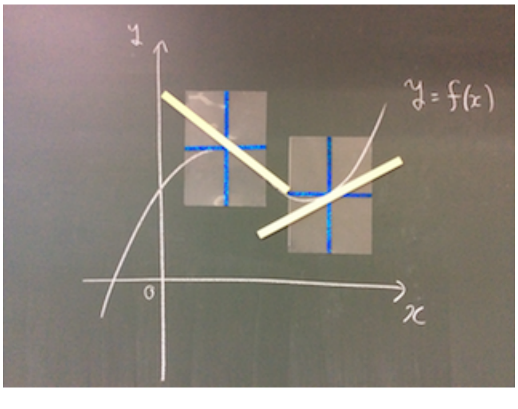


図 1: ガン見関数

[1][2][3] では微分を, 与えられた関数から導かれる**「局所的な正比例」**として捉えている. そう捉えることで, 「合成関数の微分」や「逆関数の微分」の公式の理解が深まるメリットがあると筆者は考えている. 正比例については,

- 合成したものも正比例
  ☜ 比例定数は**元の比例定数の積**
- （比例定数 $\neq 0$ のとき）逆の対応も正比例
  ☜ 比例定数は**元の比例定数の逆数**

という特徴があるので, その観点で微分の公式を見てみると・・・.

関数 $y = g(x)$ と $z = f(y)$ の合成 $z = f(g(x))$ を考える（$b = g(a)$ とする）. 2つの関数は,

- $x = a$ の付近で正比例 $Y = g'(a)X$
- $y = b$ の付近で正比例 $Z = f'(b)Y$

と見なせるので, $z = f(g(x))$ は $x = a$ の付近では, 正比例

$$Z = f'(b) \cdot g'(a)X = f'(g(a)) \cdot g'(a)X$$

と見なせる（合成関数の微分）.

また, $g'(a) \neq 0$ であれば, 正比例 $Y = g'(a)X$ の逆の対応を与える正比例

$$X = \frac{1}{g'(a)}Y$$

が定まる（逆関数の微分）. 授業では, 教科書にある証明もフォローしたが, 「局所的に正比例」という視点による**直感的な理解**も大切にしたいところである.

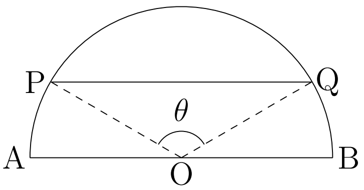
3　中間値の定理に関連して

「中間値の定理」は, 有界閉区間で連続な関数が持っている有用な性質を述べている．教科書では, 方程式の解の存在範囲を求める問などを扱っているが,

- 自分で式を立てるところから考えさせたい
- 遊べるものを・・・

ということで, [4] の章末問題を改変して次の問を考えさせた.

問　AB を直径とする半円を, AB に平行な弦 PQ を引いて面積を 2 等分してみたい．下の図における中心角 θ は大体何度くらいになるか（どういう範囲に入るか）調べよ.



半径を r とする．まず, 半円の面積は $\frac{1}{2}\pi r^2$ である．弦 PQ より上側の面積を $S(\theta)$ とすると,

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \text{扇形 OPQ の面積} - \triangle\text{OPQ の面積} \\ &= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta \end{aligned}$$

となる．次に, $f(\theta)$ を

$$\begin{aligned} f(\theta) &= S(\theta) - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 \\ &= \frac{r^2}{2}\left(\theta - \sin\theta - \frac{1}{2}\pi\right) \end{aligned}$$

と定めると, $f(\theta)$ は連続関数で

$$\begin{aligned} f\left(\frac{2}{3}\pi\right) &= \frac{r^2}{2}\left(\frac{2}{3}\pi - \sin\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) \\ &= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) < 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\pi\right) &= \frac{r^2}{2}\left(\frac{3}{4}\pi - \sin\frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2}\pi\right) \\ &= \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0 \end{aligned}$$

となり, 中間値の定理より $f(\tilde{\theta}) = 0$ となる $\tilde{\theta}$ が $\left(\frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi\right)$ に存在する．ちなみに, [4] の原題では「120° と 135° の間に条件を満たす θ が存在することを示せ」であった.

$\pi \fallingdotseq 3.1415, \sqrt{2} \fallingdotseq 1.4141, \sqrt{3} \fallingdotseq 1.7321$ として $r = 1$ の場合で数値計算を行うと,

$$f\left(\frac{2}{3}\pi\right) \fallingdotseq -0.1712\,,\ f\left(\frac{3}{4}\pi\right) \fallingdotseq 0.0391$$

となり, その差は約 0.2 である. この範囲で θ と $f(\theta)$ とが比例していると仮定すると,

120°	123°	126°	129°	132°	135°
−0.17	−0.13	−0.09	−0.05	−0.01	0.03

となり, 132° 辺りが一番良い中心角のように思われる.

「2 等分になっていること」を確かめたかったので, [5] の分度器画像を使い**ロースハムを切断**し, 家庭科からお借りした秤を使って重さを比較する実験を行った.

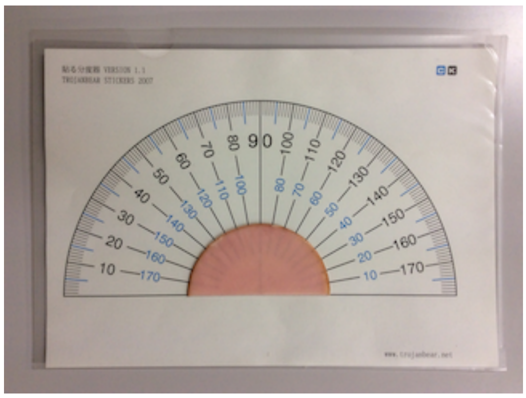


図 2: 分度器画像にハムをセット

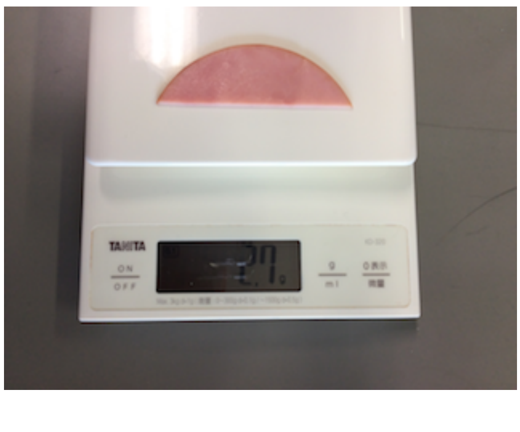


図 3: 上側の部分

図 4: 下側の部分

4　テイラー展開に向けて

微分の単元のまとめとして, **テイラー展開**の話をする予定であったが, 物理の授業で紹介したことを聞いたので, 授業では積極的には扱わず軽く触れるにとどめた.

[6] で取り上げたが, 前年度末に文系の授業でテイラー展開の紹介をした際に,

「$\sin x$ は x の整式としては表せない」

ことの証明を幾つか説明した. そこで, 理系の授業ではその**証明を考えさせる**ことにした. 以下, 生徒が考えた証明を紹介する. 存在しないことを正面切って証明するのは難しいので, 背理法を利用している.

$P(x)$ は n 次 $(n \geqq 1)$ の多項式とする. つまり,

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

1. $(\sin x)^{(n+1)} = \pm\sin x, \pm\cos x$（のいずれか）だが, $P^{(n+1)}(x) = 0$ となり矛盾が生ずる.

2. $(\sin x)'' = -\sin x$ なので,

$$P(x) + P''(x) = \sin x + (\sin x)'' = 0 \cdots ①$$

となる. $P(x) + P''(x)$ の最高次の項は $a_n x^n$ であり, ①が全ての実数 x について成り立つならば $a_n = 0$. これは, $a_n \neq 0$ に矛盾する.

3. $(\sin x)'' = -\sin x$ なので,

$$-P''(x) = P(x) \cdots ②$$

が成り立つ. $P''(x)$ の最高次の項は $a_n \neq 0$ より $n(n-1)a_n x^{n-2}$ なので, ②が成り立つならば, 次数を比較して $n = n-2$. これを満たす n は存在しない.

4. $(\sin x)' = \cos x$ より,

$$\{P(x)\}^2 + \{P'(x)\}^2 = 1 \cdots ③$$

が成り立つ. このとき, 左辺の最高次の項は $(a_n)^2 x^{2n}$ であり, ③が全ての実数 x について成り立つならば $a_n = 0$. これは, $a_n \neq 0$ に矛盾する.

5. $\sin x = P(x)$ が成り立つとき,

$$\sin 3x = P(3x) \cdots ④$$

も成り立つ.

$$\begin{aligned} \sin 3x &= 3\sin x - 4\sin^3 x \\ &= 3P(x) - 4\{P(x)\}^3 \end{aligned}$$

より, $\sin 3x$ の最高次の項は $-4(a_n)^{3n} x^{3n}$ である. 一方, $P(3x)$ の最高次の項は $3^n a_n x^n$ である. ④が成り立つならば, 次数を比較して $3n = n$. このとき, $n = 0$ となり, $n \geqq 1$ に矛盾する.

6. $(\sin x)' = \cos x$ より,

$$\sin x \cos x = P(x)P'(x)$$

が成り立つ. 両辺を 2 倍すると,

$$\sin 2x = 2P(x)P'(x) \cdots ⑤$$

を得る.

$\sin 2x = P(2x)$ の最高次の項は $2^n a_n x^n$ であり, 一方, $2P(x)P'(x)$ の最高次の項は,

$$2 \cdot a_n x^n \cdot n a_n x^{n-1} = 2n(a_n)^2 x^{2n-1}$$

となる.

⑤が成り立つならば, まず, 次数を比較して $n = 2n - 1$ より $n = 1$. このとき係数について, $2a_1 = 2(a_1)^2$ となり, $a_1 = 0, 1$ を得る. $a_1 = 0$ は最高次の項の係数が消えてしまうので不適. また, $a_1 = 1$ のときは $\sin x = x + a_0$ となるが, これも不適である.

7.
$$\lim_{x\to\infty}|P(x)| = \lim_{x\to\infty}|x^n|\left|a_n+\ldots+\frac{a_0}{x^n}\right|$$
$$= \infty$$

だが, $\lim_{x\to\infty}|\sin x|$ は振動するので矛盾.

8. $\sin x$ は奇関数だから, $P(x)$ も奇関数. よって, 方程式 $P(x)=2$ は解をもつ. 一方, 方程式 $\sin x = 2$ は $|\sin x| \leqq 1$ より, 解をもたないので矛盾が生ずる.

9. 方程式 $P(x) = 0$ の解は多くて n 個である (代数学の基本定理). 一方, 方程式 $\sin x = 0$ の解は $x = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ であり, 無限個存在するので矛盾が生ずる.

表現が異なるだけで, 本質的には同じである証明も有るが,

- **「これどうですか？」**と多くの意見が出た
- **何種類も証明を考えた**生徒が存在

ので, この問題を扱って良かったと感じている.

5　終わりに

本稿では3つの実践を紹介したが,

- ガン見関数・正比例
  ☜ 微分の本質
- 中間値の定理
  ☜ 式を立てて得られた結果を検証
- $\sin x \neq P(x)$
  ☜ 微分のまとめ
  ☜ テイラー展開への下ごしらえ

ということで, 高校数学から**少し背伸びをして先を見ることを意識した内容**となっている. 微分・積分はまだまだ**「遊び・背伸び」のできる単元**だと考えているので, 教材づくりを進めていきたい.

参考文献等

[1] 森毅「現代の古典解析」 ちくま学芸文庫

[2] 小林他「解析序説」ちくま学芸文庫

[3] 黒田他「高等学校の基礎解析」ちくま学芸文庫

[4] 田島一郎「解析入門」岩波書店

[5] とろ庵　`http://www.trojanbear.net/`

[6] 長尾良平「文系の微分で One more thing」
第 101 回数学教育実践研究会レポート