第100回数学教育実践研究会　レポート発表

図形と方程式でOne more thing

北海道札幌南高等学校教諭　長尾良平

平成29年1月28日　ニッセイMKビル

1　はじめに

数学IIでは, 生徒が苦手とする内容のトップは**「三角関数」**だと思う（公式の海に溺れてしまう？）が, **「図形と方程式」も苦手とする生徒が多い印象**を受ける. それは, **扱う対象が直線や円（幾何）, 方程式から不等式（代数）まで多岐に渡る**のが理由の1つと考える.

本稿では, 生徒の興味を引いたり印象づけたりするために盛り込んだ小ネタ等を幾つか紹介していきたい.

2　距離について

平面上の2点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 間の距離 $d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ については, ABを結ぶ線分の長さとして

$$d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

とする（**ユークリッド距離**）のが標準的ではあるが, 次の4つの性質

任意の点A, B, Cについて

(1) $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \geqq 0$

(2) $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0$ は, A, Bが一致する時のみ.

(3) $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = d(\mathrm{B}, \mathrm{A})$

(4) $d(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \leqq d(\mathrm{A}, \mathrm{C}) + d(\mathrm{C}, \mathrm{B})$

を満たす d は全て**「距離と呼べる資格有り」**とするのが大学以降の数学の立場である.

そこで, 平面上の2点 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$, $\mathrm{B}(x_2, y_2)$ 間のユークリッド距離とは異なる距離の定め方として

$$d_M(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$$

で定義される**マンハッタン距離**を紹介し, 距離の持つ4つの性質を満たすことを確認させた.

宮下[1]にある**「直進行軍」**を引き合いに出して, 札幌中心部ではマンハッタン距離こそが**実情にあった距離の定め方**であることを確認した.

3　領域を利用した証明に絡めて

命題「$x + y > \sqrt{2}$ ならば $x^2 + y^2 > 1$」が成り立つことを示すために, 教科書では領域 P, Q を

$$P = \{(x, y) | x + y > \sqrt{2}\}$$

$$Q = \{(x, y) | x^2 + y^2 > 1\}$$

と定義して図示し, $P \subset Q$ を示すことによって元の命題が成り立つという証明法を紹介している. 筆者はコーシー・シュワルツの不等式を用いた別解に気がついて欲しかったので, 生徒達に別解を考えさせた.

【別解1】

コーシー・シュワルツの不等式

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geqq (ax + by)^2$$

を利用して, $x + y > \sqrt{2}$ のとき

$$(1^2 + 1^2)(x^2 + y^2) \geqq (1 \cdot x + 1 \cdot y)^2 > (\sqrt{2})^2 = 2$$

が成り立つので, $x^2+y^2>1$ が導かれる.

【別解 2】
元の命題の対偶である

$$「x^2+y^2 \leqq 1 \text{ ならば } x+y \leqq \sqrt{2}」$$

を証明する.
$x^2 \geqq 0, y^2 \geqq 0$ なので, 相加・相乗平均の不等式より,

$$1 \geqq x^2+y^2 \geqq 2\sqrt{x^2y^2} = 2|xy|$$

が成り立ち, $|xy| \leqq \dfrac{1}{2}$ より $-\dfrac{1}{2} \leqq xy \leqq \dfrac{1}{2}$. このとき,

$$(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \leqq 1+2\cdot\frac{1}{2} = 2$$

より $-\sqrt{2} \leqq x+y \leqq \sqrt{2}$ が成り立つので, 特に $x+y \leqq \sqrt{2}$ である.

【別解 1】が生徒から出てきてくれたらいいなと考えていた筆者にとっては, 【別解 2】の**対偶をとる考え方は頭に無かった**. そこで, 刺激を受けた筆者も新たに別解を考えてみた.

【別解 3】
$x^2+y^2 \leqq 1$ より, $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ と表せる（$0 \leqq r \leqq 1$）. このとき,

$$x+y = r(\cos\theta+\sin\theta) = \sqrt{2}\,r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$$

と変形できる. そして, $-1 \leqq \sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ と $0 \leqq \sqrt{2}\,r \leqq \sqrt{2}$ より

$$-\sqrt{2}r \leqq \sqrt{2}\,r\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right) \leqq \sqrt{2}\,r \leqq \sqrt{2}$$

が成り立つので, $x+y \leqq \sqrt{2}$ が示される.

当初は【別解 1】を扱って終るつもりであったが, 最終的に

- 領域を利用した証明
- コーシー・シュワルツの不等式
- 相加・相乗平均の不等式
- 三角関数の合成

と数学 II において大事な項目を扱うことができた. 【別解 2】を考えてくれた生徒に感謝したい.

4 ICT の活用

領域や軌跡は動きを伴う内容なので, 授業中は黒板の前で**オーバーリアクション気味に「動き」を表現**してみるが, やはり限界がある. そこで, iPad で GeoGebra を使用し, その画面をプロジェクタで投影して生徒の想像力に働きかけてみた.

(0) 円の接線と極線
☞ 円外の点を動かしながら, 接線と極線の関係を考えさせた.

(1) 線形計画法
☞ 実際に直線を動かして y 切片の値を確認. また, $x^2+y^2=k$ のタイプも実演.

(2) アポロニウスの円
☞ 2 定点からの距離を表示させながら軌跡が円になることを確認.

(3) 2 直線 $\ell_1 : kx-y=0, \ell_2 : x+ky=-2k+2$ の交点の軌跡
☞ 板書のみだと理解しにくいものの代表格かと・・・.

(4) 直線 $\ell : y = 2tx-t^2-2t-3$ の掃過領域
☞ 境界の放物線が浮かび上がると歓声が！

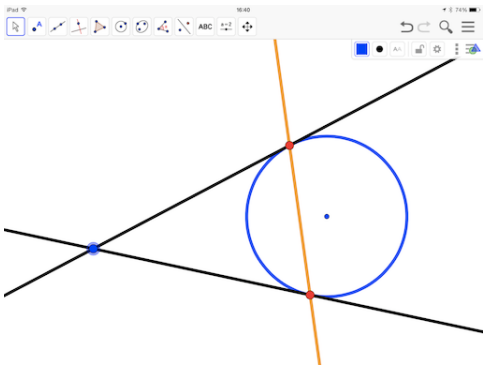

図 1: 接線と極線

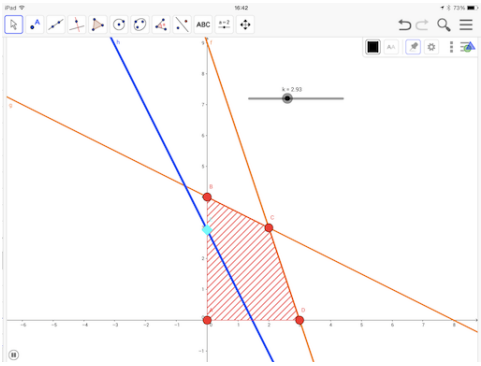

図 2: 線形計画法

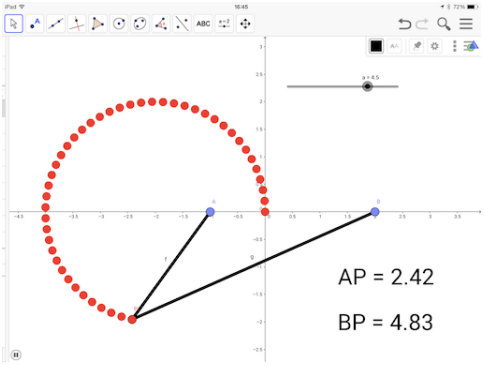

図 3: アポロニウスの円

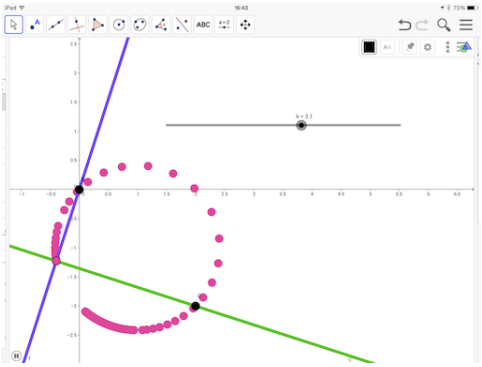

図 4: 2 直線の交点がなす軌跡

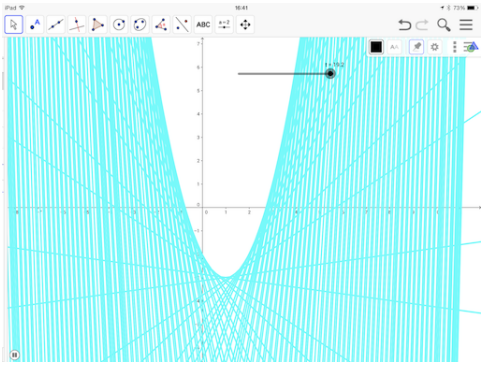

図 5: 直線の掃過領域

生徒には,「今見たイメージを大事にしながら,数式から**(文明の利器が無くても)想像できるようにしておこうね**」と話している.

5　アポロニウスの円

教材研究をしていて Web で見つけた話題が,**「東京タワーと東京スカイツリーが同じ高さに見える場所について」**である.面白いと感じたので,アポロニウスの円を導いた後で扱ってみた.

(1) 2 つの塔の高さを知ってる?
　☜ 東京タワー:333m
　　東京スカイツリー:634m

(2) 高さの比を約 1 : 2 として,同じ高さに見えるべき場所の条件は?
　☜ 遠近法の原理から,2 つの塔からの距離の比が 1 : 2 になっている場所

(3) 配布した地図上に条件を満たす点をとってみよう.また,どんな図形になるか考えよう.
　☜ アポロニウスの円!

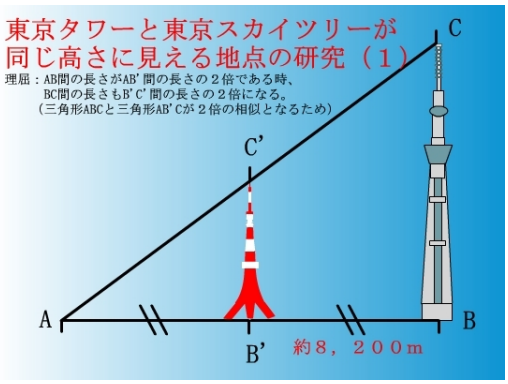

図 6: 遠近法の原理に基づいて

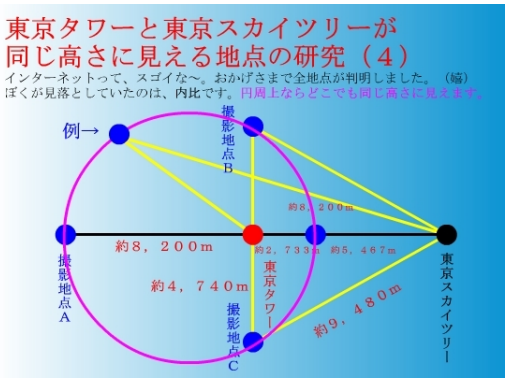

図 7: 具体的に考えてみると

図 8: お台場から（目を凝らしてみれば）

図 9: 奥沢から（目を凝らしてみれば）

札幌市内で同様のことが,

- JR タワー（173m）
- プレミアホテル中島公園札幌（92m）

等で考えることができるので,「同じ高さに見える場所を探そう！」と生徒達に話を振ってみた. 他の建物が障害となって実際に写真に納めるのは意外と難しい. 正解の一例として, 伏見にある札幌市水道記念館があげられる.

図 10: JR タワー

図 11: プレミアホテル中島公園札幌

図 12: 札幌市水道記念館から

筆者は先週の 1 月 20 日（金）に札幌北高校にて開催された**「SCRUM**[1]に係る公開研究会」に参加したが, **偶然にも**東京学芸大学の西村先生が**スカイツリーを題材に模擬授業** [5] をされた.

その授業は, 数学 II の「軌跡」ではなく, 数学 A の**「図形の性質」**での実践であり, **生徒との対話を通して**状況を整理していき

- 角の二等分線の性質
- 中点連結定理
  （外角の二等分線の性質）

から条件を満たす点の集合が円であることを導かせていた.

数学 II で距離や軌跡の概念を学んでからの教材と考えていた筆者には, **目から鱗が落ちる実践**であった.

次回この内容を扱う際には, 西村先生の実践も参考にして授業を行ってみたいと考えている.

[1]教科等の本質的な学びを踏まえたアクティブ・ラーニングの視点からの学習・指導方法の改善のための実践研究

6　終わりに

筆者自身が楽しんで授業を行いたいので, 積極的に $+\alpha$ の事柄を積極的に授業に盛り込むようにしている.

- 発展的事項
- 復習的事項
- 補足的事項
- 応用的事項

そのためには, **普段の授業計画をしっかり立てる**ことが必須であり, その点についてさらに改善していきたいと考えている.

SCRUM の研究会において, 西村先生と文科省の長尾視学官から講義 [5][6] があり, これから求められる学力や学びのスタイルについて説明があった. 説明を聞いていると, **「興味を持った事柄について楽しみながら調査・研究をし, レポートにまとめる」**という筆者がやっていることを生徒がやってくれれば良いのかなあ・・・と感じた（短絡的過ぎるか？）.

スカイツリーの内容に関しては, Web サイト**「東京スカイツリーファンクラブ」**[3] を運営している東京アンテナ工事（株）の三矢宏さんに多くのことを教えていただいた. 三矢さんは新聞 [4] や TV の取材も受けておられ, 東京タワーとスカイツリーが同じ高さに見える場所にいることを教えてくれる「アポロニウス 11 号」という Android 用のアプリまで作製されている.

三矢さんによると, 平成 30 年度発行の東京書籍の教科書にスカイツリーの話が掲載されるそうである. また, [7] についての情報も教えていただいた. この流れを受けて, 今後はこのネタが全国の高校で扱われるようになるのではないかと予想している.

図 6・7 については [3] から, 図 10・11 については [9] からデータをお借りした. また, 図 9 の写真を撮影するためには, [8] を参考にした. お礼を申し上げる.

いつか, **2 つの塔がくっきりと写った写真**を披露できればと思っています・・・(笑）.

参考文献等

[1] 宮下あきら「魁！ 男塾」 集英社
第 1 巻「地獄へ直進行」の巻

[2] 中村文則「円の接線と極線の小手技」
第 66 回数学教育実践研究会レポート

[3] 東京スカイツリーファンクラブ
http://www.diginet.ne.jp/tokyo-ant/tstfc/tstfc.html

[4] 東京新聞 2011 年 8 月 18 日付朝刊 26 面
「TOKYO 発　新旧タワー同じ高さ！」

[5] 西村圭一　SCRUM に係る公開研究会での模擬授業・授業説明

[6] 長尾篤志　SCRUM に係る公開研究会での講義

[7] 東京学芸大学附属国際中等教育学校
「本校数学科の取り組みのスライド」
http://www.iss.oizumi.u-gakugei.ac.jp/ssh/math/h27_joho_siryo.pdf

[8] ちょろげ日記
http://tyoro-ge.hatenablog.com/entry/skytree-tokyotower-height

[9] 超高層ビル・超高層マンションの
「BLUE STYLE COM」
http://www.blue-style.com/