三角関数の三角関係

札幌創成高校　数学科　教諭

外山　尚生

[キーワード]三角関数、三角比

§１　はじめに

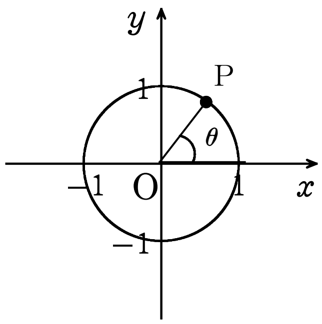
三角関数。サイン、コサイン、タンジェントというと覚えることが多い、難しいと生徒には嫌われ者であるようだ。教科書に載っている莫大な「覚えなければならないこと」をいかに効率よく、理解して覚えていくかが大切になってくる。ここでは三角関数のいろいろな「覚えなければならないこと」を３つのアプローチから考えて、どれが生徒にとって理解しやすいか考えてみたい。

§２　三角関数の３つのアプローチ

三角関数を理解するための重要なアイテムとなる３つのアプローチをここでは紹介したい。

[アプローチ１]単位円を使ったアプローチ

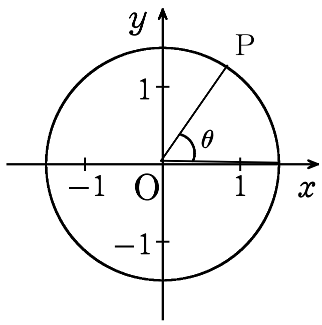
半径1の単位円に関して一般角θの動径と単位円の交点を$P(x,y)$とする。
このとき
$\sin\theta = y$
$\cos\theta = x$
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
である。



単位円を使ったアプローチ法である。これを三角関数の定義としているところも多い。このアプローチのメリットは使う文字がx、yの２つでよいところである。

[アプローチ２]動径の長さをrにしたときのアプローチ

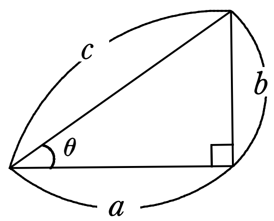
半径rの単位円に関して一般角θの動径と単位円の交点を$P(x,y)$とする。
このとき
$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$
$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$
である。



アプローチ１の動径の長さをrにしたときのアプローチ法である。

三角比の直角三角形の定義

$\sin\theta = \dfrac{b}{c}$　$\cos\theta = \dfrac{a}{c}$　$\tan\theta = \dfrac{b}{a}$



からのアプローチでスムーズに理解しやすい。

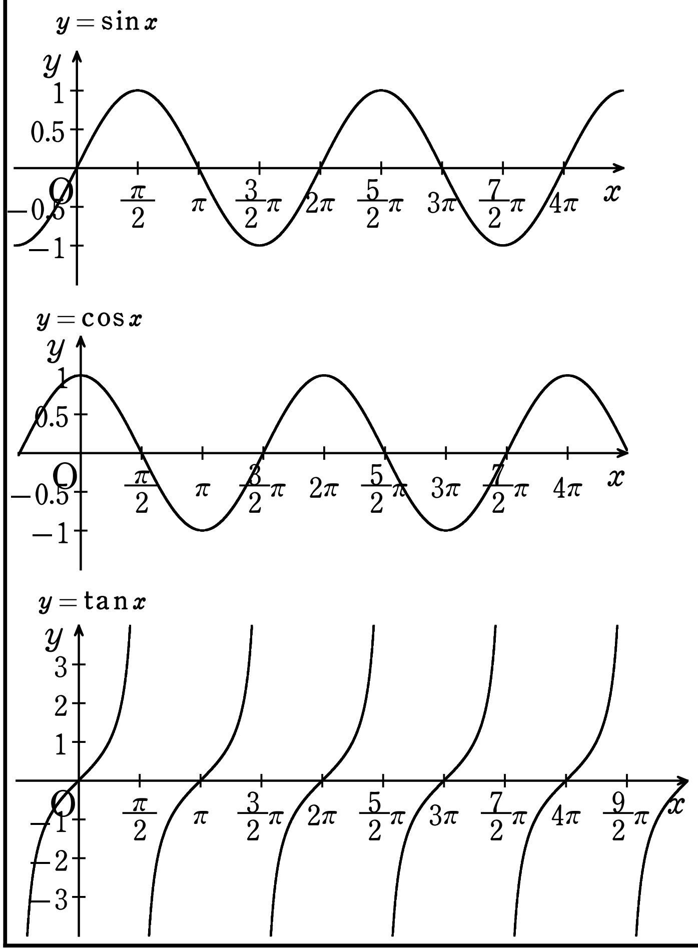
文字が増えてしまうため、このアプローチはどうなのかと思う人も多いかもしれない。

しかし、このアプローチ法を使うと三角関数をわかりやすくとらえることができるため

ここでアプローチ法の代表としてとりあげよう。

[アプローチ３]グラフを使ったアプローチ

$y=$-$\sin x$ 、$y=\cos x$ 、$y=\tan x$ のグラフは以下のようになる。



グラフを使ったアプローチである。グラフを使って三角関数を教えている人も多いだろう（筆者も高校時代はグラフを使って三角関数を教わった）。グラフは見た目ですぐにわかるというメリットがある。

この３つのアプローチをもとにして三角関数の諸問題を解いていこう。

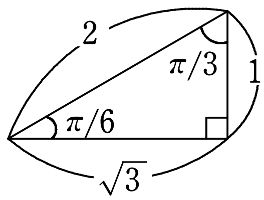
§３　３つのアプローチから三角関数の問題を解く

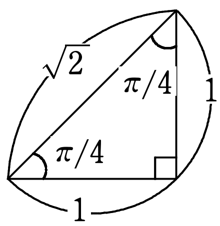
３．１　三角関数の有名な値を求める問題

３．１．１　三角関数の値を求める問題

まずは三角関数の値を求める問題を考えてみよう。ここで三角定規の三角形についての事実は既知とする。

次の三角形について以下の比が成り立つ。





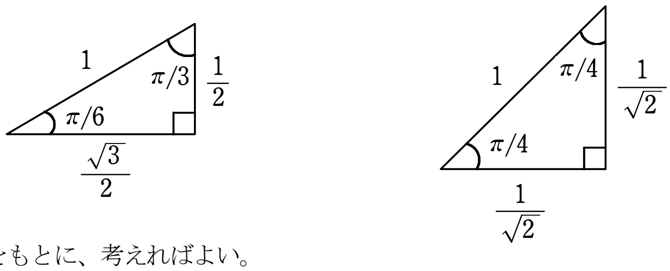
[問題１]

次の値を求めよ。

（１）$\sin\dfrac{\pi}{6}$　　　　（２）$\cos\dfrac{5}{4}\pi$

[アプローチ１]

上の三角形を相似縮小することで次の三角形を作ることができる。

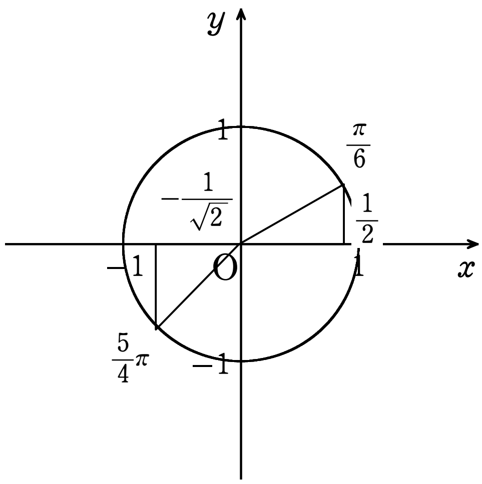


この三角形をもとに、考えればよい。

右の図から

（1）$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$　　（2）$\cos\dfrac{5}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

であることがわかる。



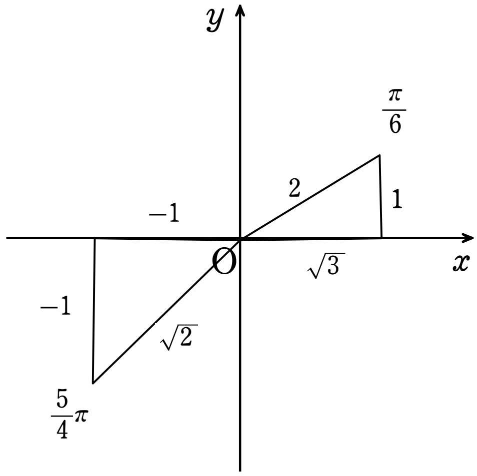
[アプローチ２]

三角定規の三角形をもとに右の図を考える。

図から

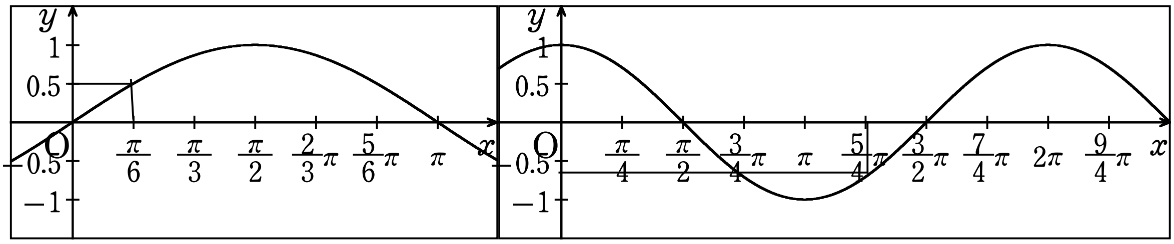
（1）$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$　　（2）$\cos\dfrac{5}{4}\pi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

であることがわかる。



[アプローチ３]

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{\pi}{4}$、$\dfrac{\pi}{3}$のとき$\sin\theta$、$\cos\theta$の値が$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であることを知っていれば、三角関数のグラフを考えることによって値を求めることができる。



グラフより（1）$\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$（2）$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$である。

３．１．２　三角関数の方程式、不等式

次に方程式と不等式を考えてみたい。

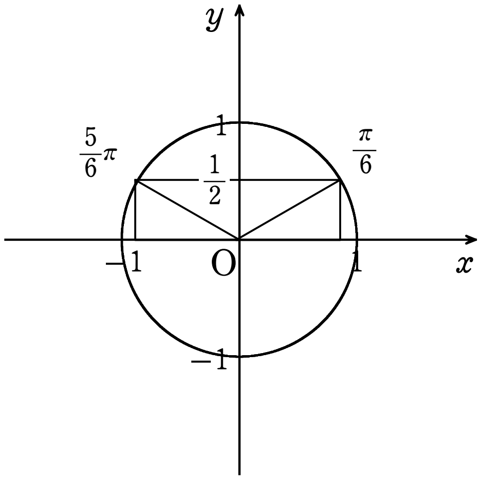
[問題２]

次の方程式、不等式を解け。ただし、$0 \leqq \theta < 2\pi$とする。 （１）$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$　　　　　（２）$\cos\theta < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

[アプローチ１]

前問のアプローチ１で使った三角形を使って求めればよい。

右の図より



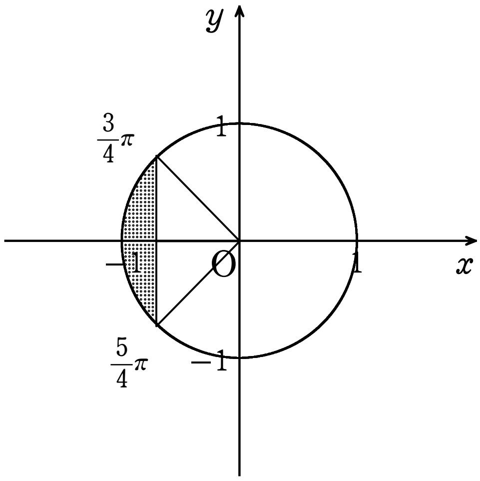
（１）$\theta = \dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{5}{6}\pi$

注$\dfrac{5}{6}\pi = \pi - \dfrac{\pi}{6}$と考えればよい。

（２）求めるθは右の図の塗りつぶした部分

つまり、$\dfrac{3}{4}\pi < \theta < \dfrac{5}{4}\pi$である。

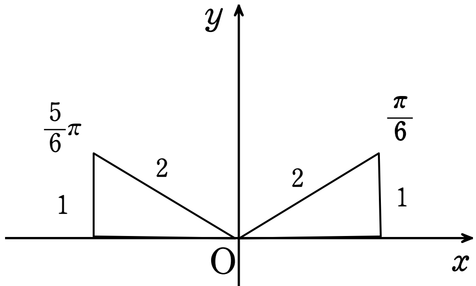
注$\dfrac{3}{4}\pi = \pi - \dfrac{\pi}{4}$、$\dfrac{5}{4}\pi = \pi + \dfrac{\pi}{4}$と考えればよい。



[アプローチ２]

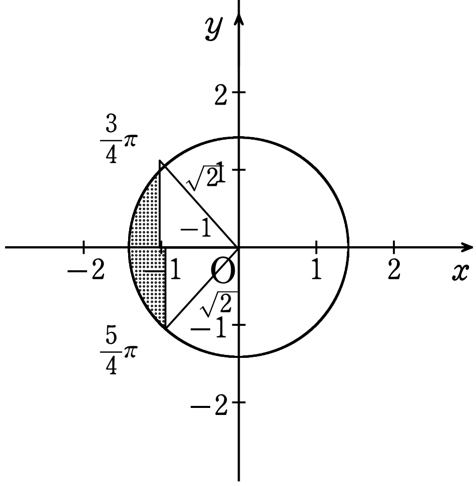
（1）$\sin\theta=\dfrac{y}{r}=\dfrac{1}{2}$であるから三角定規の三角形を考えて

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{5}{6}\pi$である。



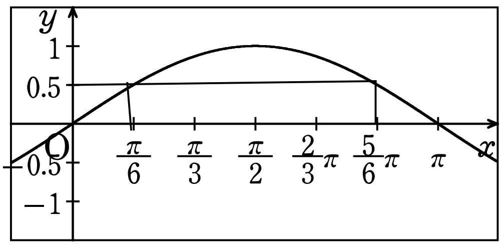
（2）求めるθは右の図の塗りつぶした部分

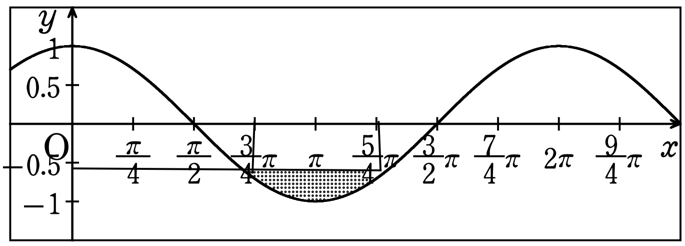
つまり、$\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{5}{4}\pi$である。



[アプローチ３]

$\theta=\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{\pi}{4}$、$\dfrac{\pi}{3}$のとき$\sin\theta$、$\cos\theta$の値が$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$であることを知っていれば、三角関数のグラフを考えることによって値を求めることができる。





（1）上図より$\theta=\dfrac{\pi}{6}$、$\dfrac{5}{6}\pi$

（2）上図より$\dfrac{3}{4}\pi<\theta<\dfrac{5}{4}\pi$

３．１．３　まとめ

アプローチ１は代表的な解法であるが、①分数が出てくる点②$\dfrac{1}{2}$、$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$、$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$の値になじみが薄い点でアプローチ２の方がわかりやすく、とっつきやすい解法になる。しかしながら、アプローチ２の解法は万能ではなく、例えば次のような問題が出てきたときには混乱を招いてしまう。

$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$を解け。ただし、$0\leqq\theta<2\pi$とする。

この問題をアプローチ２で解こうとすると、rの長さが変化してしまうので一度に求めるのは難しい。

また、アプローチ１であると$\sin\theta$、$\cos\theta$が何を表しているのかわからないまま終わってしまう恐れもあるので注意が必要だ。

さらに、アプローチ３はある程度の暗記を前提とした解法である。ただ、アプローチ１、２が理解できた段階でアプローチ３を考えることができると早く解答に結び付けることができるかもしれない。

３．２　三角関数の還元公式

３．２．１　還元公式の証明

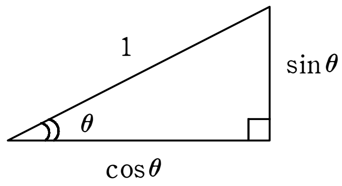
[問題３]

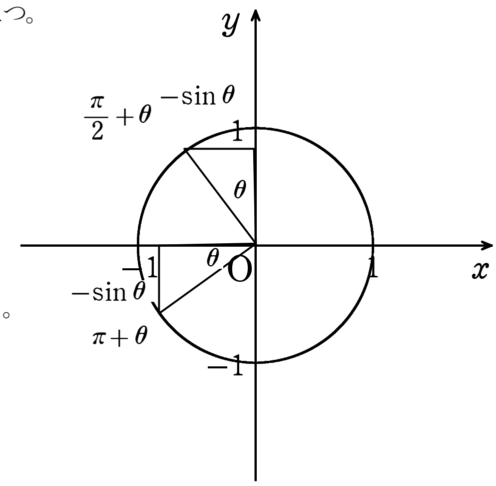
次の式が成り立つことを証明せよ。

（１）$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$　　　　　　　（２）$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$

[アプローチ１]

三角関数のアプローチ１の定義より直角三角形について次の式がなりたつ。



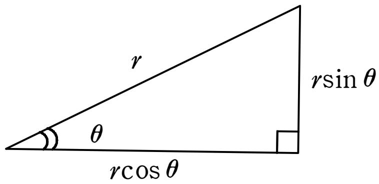


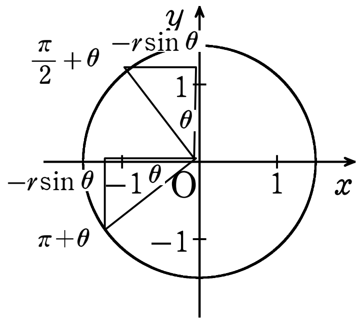
この三角形を右の図のように当てはめることによって示すことができる。

[アプローチ２]

アプローチ１と基本的な考え方は変わらない。

次のような三角形を考えて、この三角形を右のように当てはめることによって示すことができる。

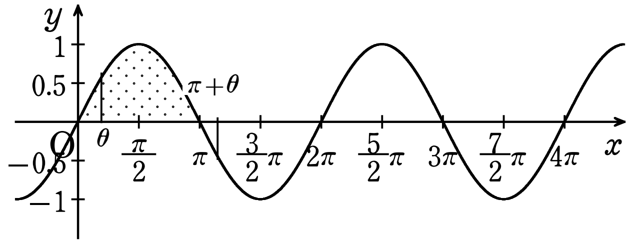




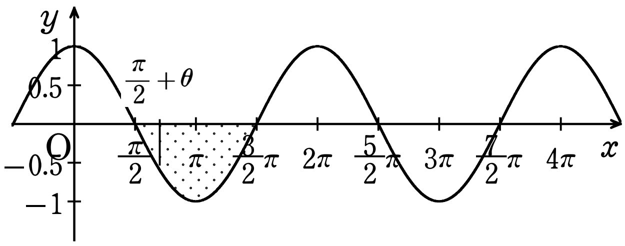
右図より$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=\dfrac{-r\sin\theta}{r}=-\sin\theta$ 、$\sin(\pi+\theta)=\dfrac{-r\sin\theta}{r}=-\sin\theta$ である。

[アプローチ３]

$\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ はサインのグラフが下の塗りつぶした部分が合同な図形であることがわかるので簡単に求められる。



$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\theta\right)=-\sin\theta$ も塗りつぶした部分が上の塗りつぶした部分と合同な図形であるから簡単に求められる。



３．２．２　まとめ

還元公式についてはアプローチ２が半径rが余計な分、アプローチ１よりわかりにくい解法であるといえるであろう。

アプローチ３も感覚的に見た目でわかるだけにわかりやすい解答である。

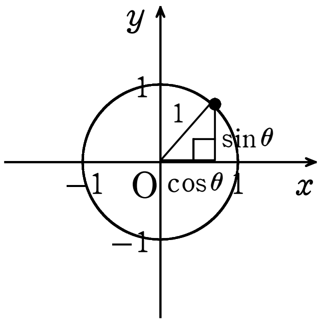
<u>３．３　三角関数の相互関係</u>

３．３．１　三角関数の相互関係

次の式を証明せよ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

[アプローチ１]

単位円に関しては円の式$x^2+y^2=1$、または三平方の定理より明らかである。



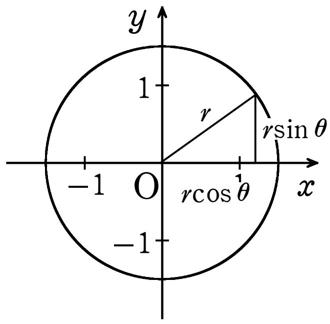
[アプローチ２]

アプローチ１と同じように三平方の定理より証明できる。

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2$

の両辺をr^2で割ると

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

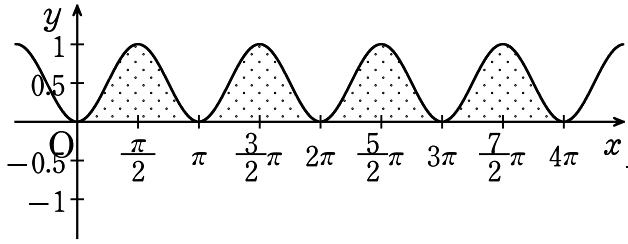


[アプローチ３]

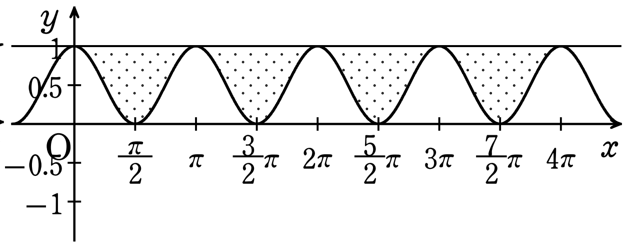
グラフからこの式を導き出すのは難しい。

とりあえず、$y=\sin^2\theta$ と$y=\cos^2\theta$ のグラフをかこう。

$y=\sin^2\theta$



$y=\cos^2\theta$



この２つのグラフの和をとることでなんとなく和が１であることがわかる。

注　半角の公式より

$\sin^2\theta = \dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$、$\cos^2\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2}$ である。

この和をとると$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ となるが、これは循環論法になってしまう。

３．３．２　まとめ

この公式に関してはアプローチ１が圧倒的にわかりやすい。グラフからこの公式を導くのは難しい。

§４　まとめ

§３で比較してきたことをまとめると次の表のようになる。

	アプローチ1	アプローチ2	アプローチ3
三角関数の値を求める	○	◎(ただし限定される)	○
還元公式	◎	△	○
相互関係	◎	△	×

ここからそれぞれのアプローチには次の特徴があることがわかる。

[アプローチ１]

単位円からのアプローチは三角関数の理解を深める上でとても有効な方法である。特に、三角関数のほとんどの性質は単位円からのアプローチで示すことができる。しかしながら、三角関数の値を求めさせる問題では、アプローチ１ではどうしてもなじみのない値が出てくるだけに限定的にアプローチ２の方がすぐれているときもある。

[アプローチ２]

アプローチ２は三角関数の値を求めさせる問題にわかりやすい。しかし、この解法は限定的にしか使うことができない。また、三角関数のいろいろな性質を導くときはアプローチ１よりアプローチ２の方がわかりやすい。

[アプローチ３]

グラフは見た目ですぐに理解ができるが、三角関数のいろいろな問題を解くうえでは三角関数に関する暗記事項が必要になってくる。つまり、グラフによるアプローチはある程度三角関数について理解が深まり、知識を得たうえで効果が出てくるアプローチの方法である。

ここから**アプローチ２**は三角関数の値を求める問題のときに使うと（限定的に）わかりやすく、**アプローチ１**は三角関数のいろいろな性質を導き出すときに使うとわかりやすい。また、**アプローチ３**はある程度三角関数に関する知識が深まったところで出すとより知識を深めることができる。このように考えると、数学の教科書の流れ「（数Ⅰ）アプローチ２→アプローチ１→（数Ⅱ）アプローチ３」の流れは実に理にかなった三角関数の流れなのかもしれない。

ちなみに筆者はアプローチ２が好きで、よく授業でも持ち出している。アプローチ１とアプローチ２を使い分けて三角関数の授業をすることが多い。

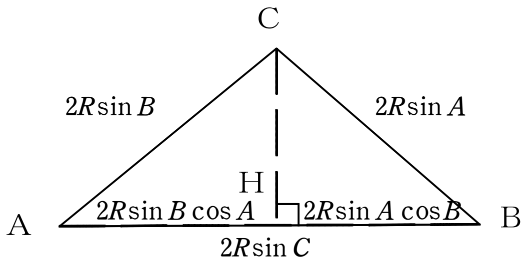
§５　アプローチ２を利用した加法定理の証明

最後にアプローチ２を利用して加法定理が証明できるので紹介しよう。

[三角関数の加法定理]

$$\boxed{\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B}$$

$\triangle ABC$の外接円の半径の長さをRとする。



正弦定理より

$a=2R\sin A$、$b=2R\sin B$、$c=2R\sin C$

がなりたつ。

ここでCからABに垂線をとり、垂線の足をHとする。

アプローチ２より

$AH=2R\sin B\cos A$

$BH=2R\sin A\cos B$

したがって

$AB=AH+BH=2R\sin B\cos A+2R\sin A\cos B$

ここで$\sin C=\sin(\pi-(A+B))=\sin(A+B)$であるから

$c=2R\sin(A+B)=2R\sin B\cos A+2R\sin A\cos B$がなりたつ。

両辺を$2R$で割って$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$である。