指スマを分析してみる

札幌創成高校
外山尚生

§０　はじめに

６月６日の大谷先生の指スマレポートは久しぶりに数学したい情熱が掻き立てられる面白い内容でした。そこで今回は指スマを分析してみた。

§１　ルールと問作成

まずは指スマのルールから確認しよう。
指スマは全員両手をグーにしてくっつけるところから始まる。じゃんけんで「攻撃側」を一人決め、ほかの人は「守備側」となる。
攻撃側が「いっせーの」である０以上の整数を「コール」し、コールと同時に攻撃側と守備側は任意に指を立てる。コールした数と立てた指の数が等しいときは攻撃側の勝ちとし、攻撃側の「勝ち」となり一つ手を外すことができる。コールした数と立てた指の数が異なるときは攻撃側の「負け」とし、次の人に「攻撃側」がうつる。
そこで、次のように問を設定しよう。

> 自分の指以外のn本の指がある。
> 攻撃側は整数k（$0\leqq k\leqq n+2$）をコールし、それと同時に攻撃側と守備側はそれぞれの指を立てるか立てないかを選択できる。
> 立てられた指の数とkが等しいとき攻撃側の勝ちとする。
> 問１　コールする整数kはいくつのときが一番勝てるか？
> 問２　攻撃側は何本の指を立てたときが一番勝てるか？
> 問３　守備側は何本の指を立てたときが一番負けないか？

§２　分析してみる

問１　コールする数kはいくつのときがよいか。

kをコールしたとき勝つ確率を計算してみよう。
n本の指のそれぞれが「立てる」か「立てない」かを決めることができるので、全部で2^n通りある。
そのうちk本立つ場合は${}_nC_k$通りとなる。

よって攻撃側が勝つ確率は$\dfrac{{}_nC_k}{2^n}$である。

${}_nC_k$の最大値を考えればよい。パスカルの三角形を見てみると次のときが最大となる。

[1]nが偶数のとき$k=\dfrac{n}{2}$のときが最大となる。

[2]nが奇数のとき$k=\dfrac{n\pm1}{2}$のときが最大となる。

問２　攻撃側は何本指を立てたときが一番勝てるか？

攻撃側の2本は攻撃側の自由に決められる。攻撃側の立てる指をl本（$0 \leqq l \leqq 2$）とする。

よって確率は$\dfrac{{}_nC_{k-l}}{2^n}$である。

問１から次の表のようにしたときが最大になる。

l	0	1	2
nが偶数	$\dfrac{n}{2}$	$\dfrac{n+2}{2}$	$\dfrac{n+4}{2}$
nが奇数	$\dfrac{n\pm1}{2}$	$\dfrac{n+2\pm1}{2}$	$\dfrac{n+4\pm1}{2}$

つまりnが偶数のときは$k=\dfrac{n}{2}+l$、nが奇数のときは$k=\dfrac{n\pm1}{2}+l$のときが最大となり、確率的にはlの値には関係ないことがわかる。

以上より指スマの攻撃側の必勝法は次のようであることがわかる。

> 残りの指の本数をn本、攻撃側が立てようとしている指の本数をlとして
> nが偶数の時は$\dfrac{n}{2}+l$、nが奇数の時は$\dfrac{n\pm1}{2}+l$をコールすればよい。
> （攻撃側が立てる指の本数は確率に違いはない）

問３　守備側は何本立てたときが一番勝てるか

自分の2本以外の指の数をn本とする。自分の立てる指をl本として（$0 \leqq l \leqq 2$）

攻撃側がk（$0 \leqq k \leqq n+2$）をコールしたとする。

攻撃側がコールする値の確率はどれも等しいとすると、kをコールする確率は$\dfrac{1}{n+3}$である。

よって確率は$\dfrac{a_k}{2^n(n+3)}$であり、a_kの値は次の表のようになる。

k	0	1	2	3	…	$n-1$	n	$n+1$	$n+2$
$l=0$	${}_nC_0$	${}_nC_1$	${}_nC_2$	${}_nC_3$	…	${}_nC_{n-1}$	${}_nC_n$	0	0
$l=1$	0	${}_nC_0$	${}_nC_1$	${}_nC_2$	…	${}_nC_{n-2}$	${}_nC_{n-1}$	${}_nC_n$	0
$l=2$	0	0	${}_nC_0$	${}_nC_1$	…	${}_nC_{n-3}$	${}_nC_{n-2}$	${}_nC_{n-1}$	${}_nC_n$

攻撃側が勝つ確率は$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2}\frac{a_k}{2^n(n+3)}$で表せられるから、$l$の値には関係なく、

確率は$\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2}\frac{a_k}{2^n(n+3)}=\frac{{}_nC_0+{}_nC_1+{}_nC_2+\cdots\cdots+{}_nC_n}{2^n(n+3)}=\frac{2^n}{2^n(n+3)}=\frac{1}{n+3}$である。

以上より指スマの守備側の必勝法は<u>ない</u>ということがわかった。

> 守備側の必勝法はない。（立てる指の数は勝率に関係ない）

§３　まとめと感想

今回の分析から指スマにはあまり必勝法がないことがわかった。数学的にはなんか不満足な結果となってしまったが、必勝法がないからこそ平等にゲームが成り立つのかもしれない。

ちなみに指スマは必勝法がある先攻の方が有利だといえそうだ。ということは、最初のじゃんけんで勝負は決まる？うーん。じゃんけん優秀。