生徒の一言から始まった数学研究

札幌創成高校　数学科　教諭
外山　尚生

§０　はじめに

生徒の質問やアイディアには私たち教員が思いつかなかった知識が詰まっている。生徒の一言を数学的に研究してみたら非常に面白いものが発見できた。そんな研究成果を①図形と方程式の線対称移動②数列の漸化式をテーマに報告してみたい。

§１　線対称移動

１．１　きっかけ

図形と方程式の線対称移動を研究するきっかけとなったのがとある生徒の質問だった。

「先生。この問題、こんな解答見つけたんですけど、なんで成り立つんですか？」

> [問]$y=2x$に関して$A(0,5)$と対称な点Bの座標を求めよ。
> [解答]$f(x,y)=2x-y=0$、$g(x,y)=x+2y=0$とおく。
> $f(x,y)+f(0,5)=0$　　$\therefore 2x-y-5=0$
> $g(x,y)-g(0,5)=0$　　$\therefore x+2y-10=0$
> を解いて、$x=4,y=3$　つまり$(4,3)$

何とも不思議な解法である。見たことのない解法だったのでその場で説明を避け、後に説明することにした。

後に調べたところ、この解法はyahoo!知恵袋に掲載されている解法であることがわかった。しかしながら知恵袋に詳しい説明はなく、いろいろ具体的に解いてみると確かにこの計算で成り立つことはわかったが、なぜ成り立つかはわからない。そこで、この式がどのような意味をもっているのか分析してみることにした。

１．２　一般化

この解き方を一般化すると次のようになる。

> $f(x,y)=ax+by+c$とする。点(x_1,y_1)を直線$f(x,y)=0$に関して対称移動した点の座標は
> $g(x,y)=bx-ay+c$とおくと、
> $f(x,y)+f(x_1,y_1)=0$　…①　$g(x,y)-g(x_1,y_1)=0$　…②の連立方程式を解くことで求められる。

１．３　分析、証明

このことを証明するには次のことを分析しなければならない。

> ①$g(x,y)$は何を表しているのか？　　$\Longrightarrow$補題１
> ②$f(x,y)+f(x_1,y_1)=0$は何を表しているのか？　　$\Longrightarrow$補題２
> ③$g(x,y)-g(x_1,y_1)=0$は何を表しているのか？　　$\Longrightarrow$補題３

それぞれ分析してみよう。

[補題１]

> 直線$g(x,y)=0$は$f(x,y)=0$と垂直な直線である。

証明　$a\fallingdotseq 0$、$b\fallingdotseq 0$のとき、$f(x,y)=0$は$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$より傾きは$-\dfrac{a}{b}$。$g(x,y)=0$は$y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}$より傾きは$\dfrac{b}{a}$。

$-\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}=-1$より$g(x,y)=0$は$f(x,y)=0$と垂直な直線である。

$a=0$、$b\fallingdotseq 0$のとき、$f(x,y)=0$は$y=-\dfrac{c}{b}$。$g(x,y)=0$は$x=-\dfrac{c}{b}$より垂直な直線である。

$a\fallingdotseq 0$、$b=0$のとき、$f(x,y)=0$は$x=-\dfrac{c}{a}$。$g(x,y)=0$は$y=\dfrac{c}{a}$より垂直な直線である。終

[補題2]

$f(x,y)+f(x_1,y_1)=0$　…①　によって表される直線は$f(x,y)=0$に平行で、 (x_1,y_1)と①上の任意の点の中点は$f(x,y)=0$上にある。

証明　$f(x,y)+f(x_1,y_1)=\ ax+by+c+ax_1+by_1+c=0$を変形して

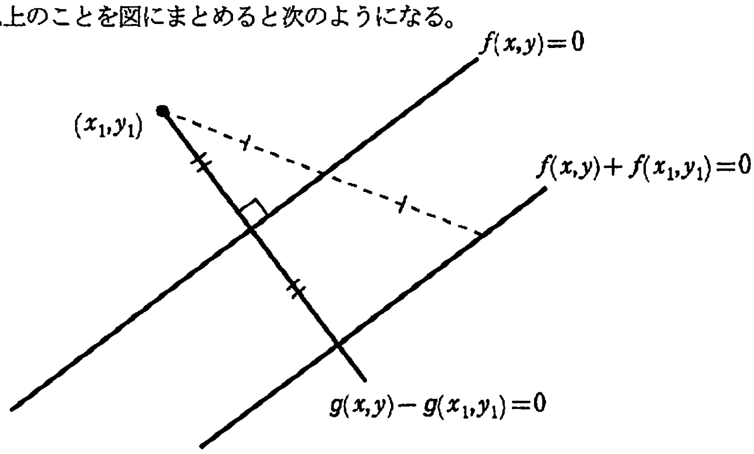
$a(x+x_1)+b(y+y_1)+2c=0$の両辺を2でわると、$a\left(\dfrac{x+x_1}{2}\right)+b\left(\dfrac{y+y_1}{2}\right)+c=0$であるから、中点は$f(x,y)=0$上にある。終

[補題3]

$g(x,y)-g(x_1,y_1)=0$は(x_1,y_1)を通る$f(x,y)=0$に垂直な直線である。

証明補題1より垂直であり、さらに$g(x_1,y_1)-g(x_1,y_1)=0$より(x_1,y_1)を通る。終

以上のことを図にまとめると次のようになる。



したがって、$f(x,y)+f(x_1,y_1)=0$と$g(x,y)-g(x_1,y_1)=0$の交点は(x_1,y_1)を直線$f(x,y)=0$について対称移動した点であることが証明された。

この解法は垂直二等分線をもとにした解法であるということがわかった。とてもシンプルな式になるので、センター試験や確かめに役立ちそうである。

この解法の出典は見つからなかったが、どこかに出典がある場合はご教授いただきたい。

§2　漸化式

2．1　きっかけ

漸化式$a_{n+1}=pa_n+q$の導入として、ハノイの塔を扱っていた時のこと。

T「具体例が出たね。では、一般項を表すことができるだろうか？」

$a_{n+1}=pa_n+q$型の漸化式は特性方程式を使わないと難しい。特性方程式を教えない状態では一般項を作ることは難しいだろうと予想していたが…

S「先生。できたよ」

T「えっ？」

S「階差数列を使うとできたよ」

$a_1=1$、$a_2=3$、$a_3=7$、$a_4=15$…の階差数列は $b_1=2$、$b_2=4$、$b_3=8$…より$b_n=2^n$ $n\geqq 2$のとき$a_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+2^n-2=2^n-1$ これは$n=1$のときも成り立つ。

$a_{n+1}=pa_n+q$型の漸化式の階差数列は等比数列になるのだろうか。もし、等比数列になるならば、この形の漸化式を解くために特性方程式が必要なくなるかもしれない。研究してみよう。

２．２　一般化

> 漸化式$a_{n+1}=pa_n+q$の階差数列は等比数列である。

２．３　分析、証明

この証明は意外と簡単であった。

$a_{n+2}=pa_{n+1}+q$ …①　$a_{n+1}=pa_n+q$ …②が成り立つから、①−②を計算すると

$a_{n+2}-a_{n+1}=p(a_{n+1}-a_n)$

$a_{n+1}-a_n=b_n$とおくと、$b_{n+1}=pb_n$より数列$\{b_n\}$は初項$b_1=a_2-a_1$、公比pの等比数列である。

$b_n=(a_2-a_1)p^{n-1}$。すなわち、$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)p^{n-1}$

これは階差数列が等比数列であることを示している。圏

２．４　応用

これを応用すると$a_{n+1}=pa_n+q$（$p\fallingdotseq 1$）型の漸化式の一般項を求めることができる。

$n\geqq 2$のとき$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(a_2-a_1)p^{k-1}=a_1+(a_2-a_1)\times\dfrac{p^{n-1}-1}{p-1}=\dfrac{(a_2-a_1)}{p-1}p^{n-1}+\dfrac{pa_1-a_2}{p-1}$

これは$n=1$のときも成り立つ。

$a_2=pa_1+q$より、$a_n=\dfrac{pa_1+q-a_1}{p-1}p^{n-1}+\dfrac{pa_1-pa_1-q}{p-1}=\left(a_1+\dfrac{q}{p-1}\right)p^{n-1}-\dfrac{q}{p-1}$

もちろんこれは特性方程式を使った解法で求めても同じ解になる。

この解法は遠回りではあるが、変なごまかしがない純粋な高校数学で解ける解法であるため、どうしても納得できない生徒にとってはよい解法になるのかもしれない。