「図形と方程式を図形的に見てみる」

札幌創成高校　数学科　教諭
外山　尚生

１．はじめに

数学Ⅱテーマの一つである図形と方程式は今まで幾何的アプローチしかできなかった図形の問題を座標平面を導入し、方程式を用いることによって導き出すものである。ベクトルとは違った意味で図形と式をつなげる図形と方程式は興味深い分野であるが、現在の教科書では諸性質を導き出すためにグラフの平行移動を用いるなどいまいち幾何的なアプローチが薄いように感じる。そのため、せっかく図形と方程式を勉強しても図形と方程式を結びつけず、単なる式計算として考えてしまう生徒が少なくない。そこで今回、教科書の図形と方程式の諸性質をできるだけ式計算を使わずに、図形を使って感覚的に導き出してみた。

今回の証明は論理性よりも感覚を大事にしたため、数学的には不十分な証明もあるかもしれないが、図形と方程式の図形を目立たせるためのものであるので、勘弁していただきたい。

２．２点の関係

２－１　距離の公式

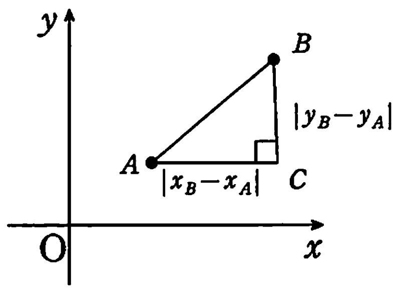
> ２点$A(x_A,y_A)$、$B(x_B,y_B)$間の距離ABは
> $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

証明 これは三平方の定理を用いることで導き出される。

$AB^2=AC^2+BC^2$より

$AB^2=|x_B-x_A|^2+|y_B-y_A|^2$

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$



２－２　分点の公式

> ２点$A(x_A,y_A)$、$B(x_B,y_B)$に対して線分ABを$m:n$に内分する点の座標は
> $\left(\dfrac{nx_A+mx_B}{m+n},\dfrac{ny_A+my_B}{m+n}\right)$

証明 平行線の性質より

$A'P':P'B'=AP:PB=m:n$

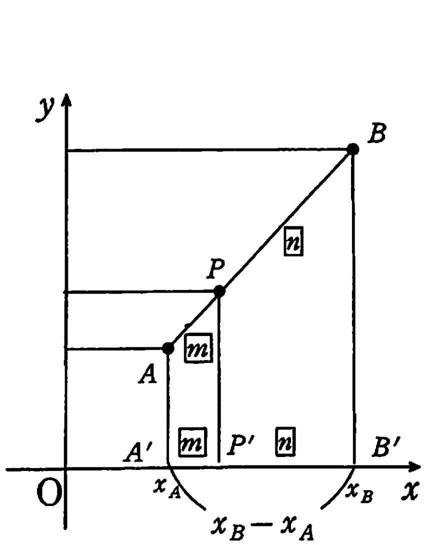
$A'B'=x_B-x_A$より

$A'P'=\dfrac{m}{m+n}(x_B-x_A)$

よってP'の座標は

$x_A+\dfrac{m}{m+n}(x_B-x_A)=\dfrac{nx_A-mx_B}{m+n}$

y座標も同様にして求められる。



参考 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を考え方のもとにしている。

★文字を使うと分かりにくいが、数字を使って考えると内分点の公式よりわかりやすい。

３．直線

３－１　直線の式

$A(x_A, y_A)$を通る傾きmの直線の方程式は $y-y_A=m(x-x_A)$

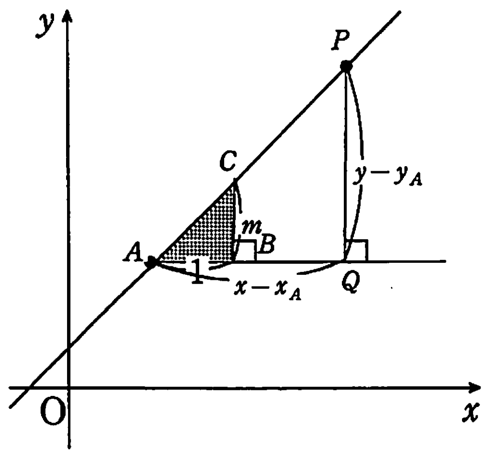
まずはじめに「傾き」についてみてみよう。

傾き$m=\dfrac{\triangle y}{\triangle x}$より次のことがわかる。

xが１増加するとyはm増加する　…☆

したがって、右の塗りつぶした三角形が書ける。

この三角形をこれから<u>傾き三角形</u>と呼ぶことにしよう。



証明 直線上に$P(x,y)$をとる。

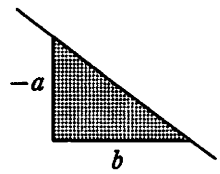
$BC /\!/ QP$より

$1:m=x-x_A:y-y_A$

$y-y_A=m(x-x_A)$

★$P(x,y)$は軌跡の考え方。円の方程式を導き出すためにも$P(x,y)$を早めに導入することは悪くない。

参考 $ax+by+c=0$について$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{c}{b}$より傾き三角形は次のようにも書ける。

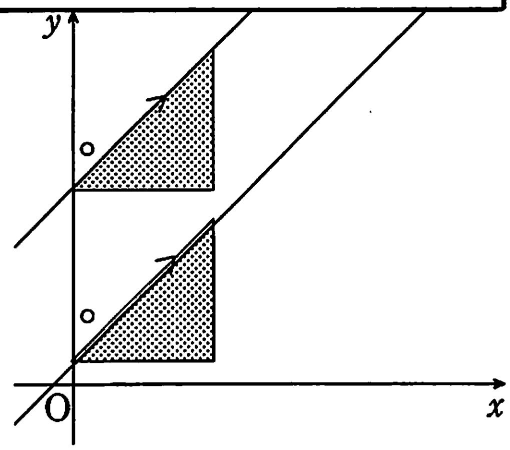


☆$-a$に違和感を感じる人がいるかもしれないが、負のむきにa進んでいるということで、$-a$と表すことにする。

３－２　平行な直線

２直線が平行なら傾きが等しい。

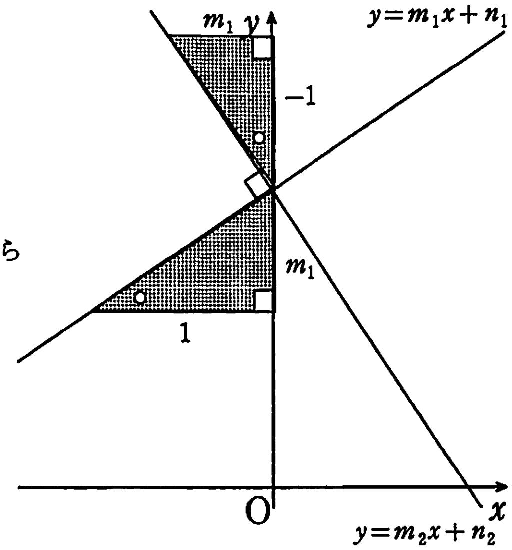
証明 平行ならば同位角が等しいから右の○の角度は等しい。
従って右の２つの傾き三角形は合同な三角形になるので
傾きが等しくなる。



参考 ２つの直線を$a_1x+b_1y+c_1=0$、$a_2x+b_2y+c=0$とすると、３－１の参考から$-a_1:b_1=-a_2:b_2$が成り立つので、$a_1:b_1=a_2:b_2$

3－3　垂直

$y=m_1x+n_1$と$y=m_2x+n_2$が垂直ならば$m_2=-\dfrac{1}{m_1}$



証明 右の２つの傾き三角形が合同である。

よって

$$m_2=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-1}{m}$$

参考 $a_1x+b_1y+c_1=0$と$a_2x+b_2y+c_2=0$のときは３－１の参考から

$-a_1:b_1=a_2:b_2$

すなわち$a_1b_1+a_2b_2=0$と表せるが、

わかりにくいので素直にベクトルを利用して

内積＝０で考えたほうがわかりやすい

４．点と直線の距離

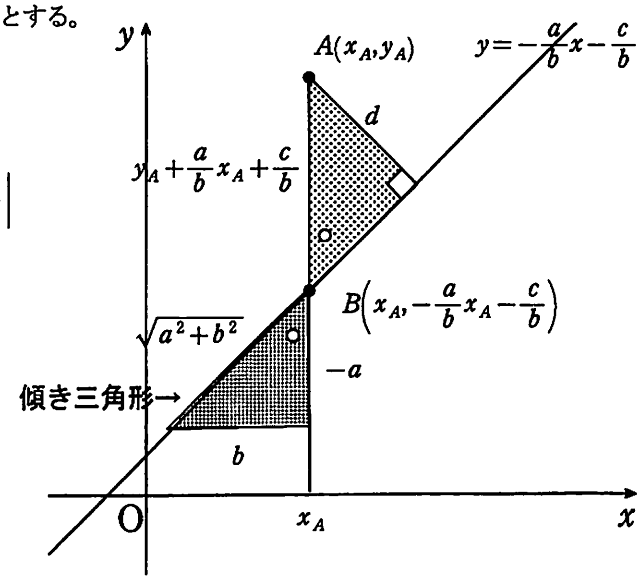
点$A(x_A,y_A)$と直線$ax+by+c=0$の距離は

$$d=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

今までの式は式とイメージが結びつきやすい公式であったが、この点と直線の距離についてはこの式が何を意味しているのかわかりにくい。

ここでは傾き三角形を使って考えたいので、$ax+by+c=0$を変形して$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$で考えることにする。

☆$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$では式計算が複雑になるので、生徒の学力に合わせて$y=mx+n$で計算するのもよい。



証明 Aからx軸に向かって垂線を引き、直線との交点をBとする。

Bは直線上の点でx座標がx_Aより

$B\left(x_A,-\frac{a}{b}x_A-\frac{c}{b}\right)$である。

よって$AB=\left|y_A-\left(-\frac{a}{b}x_A-\frac{c}{b}\right)\right|=\left|y_A+\frac{a}{b}x_A+\frac{c}{b}\right|$

次に傾き三角形を右の図のように考えよう。

傾き三角形の斜辺の長さは三平方の定理より

$\sqrt{a^2+b^2}$である。

図の塗りつぶした三角形は相似であるから、

$$\sqrt{a^2+b^2}:b=\left|y_A+\frac{a}{b}x_A+\frac{c}{b}\right|:d$$

したがって、

$$\sqrt{a^2+b^2}\,d=b\left|y_A+\frac{a}{b}x_A+\frac{c}{b}\right|$$

$$d=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

☆図はAが直線より上にある時を考えているが、Aが直線より下にある場合は絶対値をつけておけば問題ない。

☆$\sqrt{a^2+b^2}$は傾き三角形の斜辺の長さだったんだ！

５．円の接線

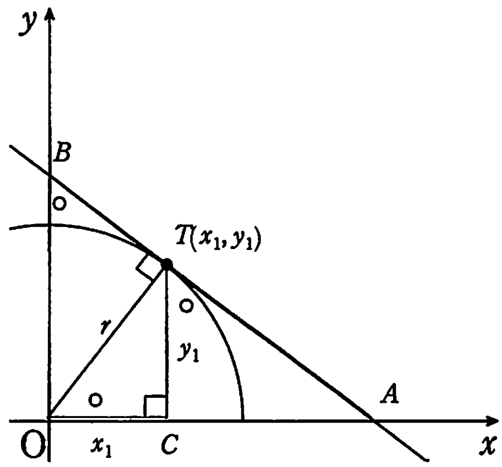
円$x^2+y^2=r^2$上の点$T(x_1,y_1)$における接線の方程式は $x_1x+y_1y=r^2$

この式は微分を学んでいればイメージがつきやすいが、微分を学んでいない状態だとイメージがつかない。
教科書では垂線を使って求めているが、垂線を使った証明はわかりやすいが、この式の表す美しさはみえてこない。
そこで今回、あえて遠回りな証明を試みてこの式の表す美しさを味わってみたい。
この式を証明する前に、一つ補題を出しておこう。
補題１

$A(a,0)B(0,b)$を通る直線の式は $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

この補題は$y=-\dfrac{b}{a}x+b$より両辺をbで割って、式変形すると求められるが、$(a,0)$と$(0,b)$を代入すると等式が成り立つように式を作ったと考えるほうがイメージがつきやすい。

さて、それではいよいよ接線の式の証明に入る。



$\boxed{\text{証明}}$$\triangle OCT \backsim \triangle OTA$より

$x_1:r=r:OA$

$OA=\dfrac{r^2}{x_1}$

よってAの座標は$\left(\dfrac{r^2}{x_1},0\right)$

$\triangle OCT \backsim \triangle BTO$より

$y_1:r=r:OB$

$OB=\dfrac{r^2}{y_1}$

よってBの座標は$\left(0,\dfrac{r^2}{y_1}\right)$

したがって、補題１より求める直線の方程式は

$$\frac{x}{\frac{r^2}{x_1}}+\frac{y}{\frac{r^2}{y_1}}=1 \qquad \therefore x_1x+y_1y=r^2$$

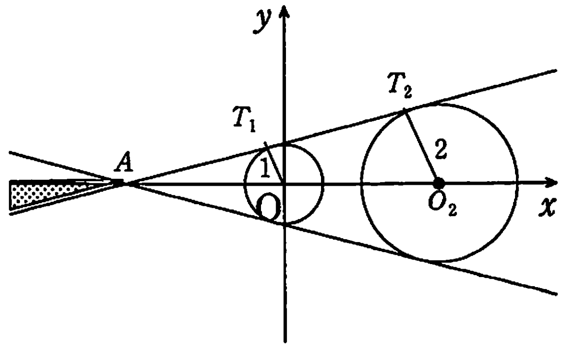
☆接線の方程式は２つの切片の座標から求める式と関連があったとは！しかも実は連分数という…。

6. ２円共通接線の問題を幾何的に解いてみた

最後に２円の共通接線の問題を幾何的に解いてみたい。

円$x^2+y^2=1$……①と円$(x-4)^2+y^2=4$……②に共通な接線の方程式を求めよ。（黄チャート　重要例題９３）

（１）外側接線



右図で

$O_1T_1 /\!/ O_2T_2$より平行線の性質から

$AO_1:AO_2=1:2$である。

すなわち、AはO_1O_2を$1:2$に外分する点である。

よって、$A(-4,0)$

接線の傾き三角形は$\triangle AT_1O$と相似である。

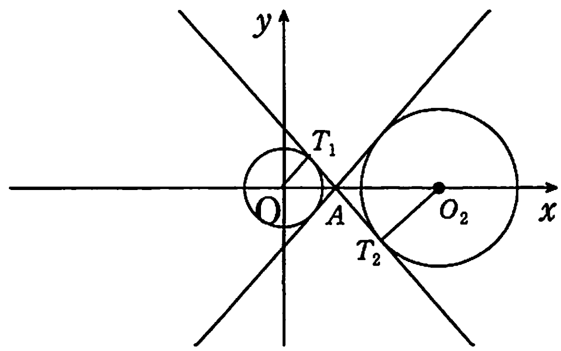
$AO=4$、$OT_1=1$より三平方の定理から

$AT_1=\sqrt{15}$

したがって傾きは$\dfrac{T_1O}{AT_1}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}$

よって接線の方程式は$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{15}}(x+4)$

（２）内側接線



右図で

$O_1T_1 /\!/ O_2T_2$より平行線の性質から

$AO_1:AO_2=1:2$である。

すなわち、AはO_1O_2を$1:2$に内分する点である。

よって$A\left(\dfrac{4}{3},0\right)$

接線の傾き三角形は$\triangle AT_1O$と相似である。

$OA=\dfrac{4}{3}$、$OT_1=1$より三平方の定理から

$AT_1=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

したがって傾きは$\dfrac{OT_1}{AT_1}=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}$

よって接線の方程式は$y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}}\left(x-\dfrac{4}{3}\right)$

参考ここから次の定理が導かれる

中心O_1半径r_1の円と中心O_2半径R_2の円の共通接線のうち ①外側の接線はO_1O_2を$r_1:r_2$に外分した点 ②内側の接線はO_1O_2を$r_1:r_2$に内分した点 で交わる。

この問題はO_1O_2がx軸上にあるため容易に傾き三角形が求められた。

もしx軸上にない場合は傾き三角形が求められないので、上の定理で１点を求め、点と直線の距離で求めればよい。

7. まとめ

図形と方程式を図形的に見つめることによってそれぞれの式が持つ意味を語りかけてくれるようになったと思う。これらの証明は授業中に生徒にも紹介したが、教科書ではわからなかった証明がこれならわかったと言う生徒が多かった。単なる式計算も図形的な意味を探ると、なかなか面白い発見ができるものである。