【確率】実は同じこと

札幌創成高校
外山　尚生

§０　はじめに

確率の問題は日常生活に合わせていろいろルールを変えています。しかしながら、ルールを変更しても実は確率的には同じであることが多くあります。このレポートではそんな「実は同じこと」を確率や期待値を使って分析してみました。

§１　くじ引きの順番

くじ引きは最初に引くのが有利なのか、それとも後から引くのが有利なのか考えてみたい。

１．１　具体例から考える

次のような例題を考えてみよう。

当たりくじ３本を含む 10 本のくじを、A、Bの２人がこの順に１本ずつ引く。引いたくじをもとに戻さない時、Aが当たる確率とBが当たる確率はどちらが大きいか。

Aが当たる確率は $\dfrac{3}{10}$ である。

Bが当たる場合はAが当たり、Bも当たる場合と、Aがはずれ、Bが当たる場合が考えられるから

$\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}+\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}=\dfrac{3}{10}$ である。

よって、AもBも当たる確率は変わらないことが予想できる。

１．２　一般化して考える

次のように一般化して考えてみる。

当たりくじ n 本を含む m 本のくじを、A、Bの２人がこの順に１本ずつ引く。引いたくじをもとに戻さない時、Aが当たる確率とBが当たる確率はどちらが大きいか。

Aが当たる確率は $\dfrac{n}{m}$ である。

Bが当たる確率は $\dfrac{n}{m}\times\dfrac{n-1}{m-1}+\dfrac{m-n}{m}\times\dfrac{n}{m-1}=\dfrac{-n+mn}{m(m-1)}=\dfrac{n(m-1)}{m(m-1)}=\dfrac{n}{m}$ である。

よって、AもBも当たる確率は変わらない。

１．３　さらに人数を増やすとどうなるか

しかしながらこのままでは最初の２人までしか考えられない。

そこで次のように考えよう。

１番目から m 番目の人が引いたくじ引きを順番に一列に並べる。この並べ方は $m!$ 通りである。

このうち a 番目の人が当たる場合の数は

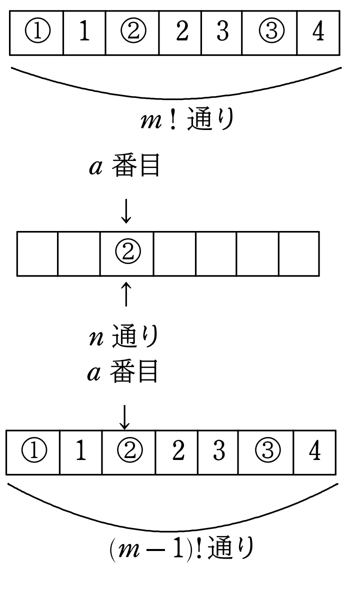
$n\times(m-1)!$ 通りである。

したがって、 a 番目の人が当たる確率は

$\dfrac{n\times(m-1)!}{m!}=\dfrac{n}{m}$ である。

したがってくじ引きは順番は関係ないということがわかった。

くじ引きは最初に引こうが後に引こうが変わらない。



§２　試合は最後までやったほうがいいのか？

　何回か試合を行うとき最初に試合の半数以上勝った時点で勝ちが決まるルールと、全試合を行って勝ち数が多い方が勝ちというルールではどっちが強いチームにとって有利なのだろうか考えてみよう。

２．１　まずは具体例で考えてみる。

　まずは次のような例題を考えてみよう。

> Aが勝つ確率が $\frac{1}{3}$ 、Bが勝つ確率が $\frac{2}{3}$ のゲームを5回行う。次のルールで勝敗を決める場合、２つのルールに違いがあるか。
> ①５回ゲームを行い、勝ち数が多い方が勝ちとする。
> ②先に３回勝った方が勝ちとする。

Aが勝つ確率を考える。

①のルールではAの勝ち数が３回、４回、５回の場合が考えられるから確率は

$${}_5C_3\times\left(\frac{1}{3}\right)^3\times\left(\frac{2}{3}\right)^2+{}_5C_4\times\left(\frac{1}{3}\right)^4\times\left(\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{17}{81}$$

②のルールでは「Aが３連勝する場合」、「Aが２勝１敗で、Aが勝つ場合」、「Aが２勝２敗で、Aが勝つ場合」が考えられるから確率は

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3C_1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)\times\left(\frac{1}{3}\right)+{}_4C_2\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\left(\frac{2}{3}\right)^2\times\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{17}{81}$$

よってルール①もルール②も確率は変わらないことが予想できる。

２．２　ルール①とルール②が等しいことの証明

　例えばルール①で５回ゲームをやった時を考える。Aが勝つ場合を A 、Bが勝つ場合を B とするとAが勝つ場合は次の 10 通りある。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	B	A	A	A	A	A	A	A	B	A	A	B	A	B	B
A	A	B	A	A	A	A	A	B	A	A	B	A	B	A	B
A	A	A	B	A	A	A	B	A	A	B	A	A	B	B	A
A	A	A	A	B	A	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A
A	A	A	A	A	B	B	B	B	B	A	A	A	A	A	A

これの順番を並び変えると

1	5	6	7	2	3	4	8	9	10	11	12	13	14	15	16
A	A	A	A	B	A	A	A	A	B	A	A	B	A	B	B
A	A	A	A	A	B	A	A	B	A	A	B	A	B	A	B
A	A	A	A	A	A	B	B	A	A	B	A	A	B	B	A
A	B	A	B	A	A	A	A	A	A	B	B	B	A	A	A
A	A	B	B	A	A	A	B	B	B	A	A	A	A	A	A

　Aが3連勝　　　Aが2勝1敗でAが勝つ　　Aが2勝2敗でAが勝つ

ここから、ルール①とルール②は同じことであることがわかる。

§３　くじは戻した方がいいのか？

くじ引きを何本か引くとき、同時に引いた方がいいのだろうか？それとも１本ずつ引いた方がいいのだろうか。また、くじ引きを1本ずつ引いた場合、くじは戻した方がいいのだろうか、それとも戻さない方がいいのだろうか考えてみよう。

３．１　まずは具体例で考えてみる。

まずは次のような例題を考えてみよう。

> 当たりくじ３本を含む10本のくじがある。この中から次のルールで２本のくじを引く場合、当たりの本数の期待値に違いはあるか。
> ①同時に２本のくじを引く
> ②１本ずつ２回続けてくじを引く。引いたくじはもとにもどす。
> ③１本ずつ２回続けてくじを引く。引いたくじはもとにもどさない

それぞれの期待値を求めてみる。

ルール①では2本当たる確率は $\dfrac{{}_3C_2}{{}_{10}C_2}=\dfrac{1}{15}$、1本当たる確率は $\dfrac{{}_3C_1\times{}_7C_1}{{}_{10}C_2}=\dfrac{7}{15}$ であるから期待値は

$2\times\dfrac{1}{15}+1\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{3}{5}$

ルール②では2本当たる確率は $\dfrac{3}{10}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{9}{100}$ 、1本当たる確率は $\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{10}+\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{10}=\dfrac{21}{50}$ であるから期待値は $2\times\dfrac{9}{100}+1\times\dfrac{21}{50}=\dfrac{3}{5}$

ルール③では2本当たる確率は $\dfrac{3}{10}\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{1}{15}$ 、1本当たる確率は $\dfrac{3}{10}\times\dfrac{7}{9}+\dfrac{7}{10}\times\dfrac{3}{9}=\dfrac{7}{15}$ であるから期待値は $2\times\dfrac{1}{15}+1\times\dfrac{7}{15}=\dfrac{3}{5}$

つまりどの場合も当たる本数の期待値は変わらないことが予想できる。

３．２　ルール①とルール③の期待値は変わらないことの証明

ルール①とルール③は確率が変わらないことを証明しよう。

> 当たりくじ n 本を含む m 本のくじがある。この中から２本のくじを引く場合、①同時に２本のくじを引くときと、③１本ずつ２回続けてくじを引く。引いたくじはもとにもどさない時の確率は変わらない。

ルール①で 2本当たる確率は $\dfrac{{}_nC_2}{{}_mC_2}=\dfrac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{m(m-1)}{2}}=\dfrac{n(n-1)}{m(m-1)}=\dfrac{n}{m}\times\dfrac{n-1}{m-1}$ であり、これはルール③の確率を示している。

ルール①で1本当たる確率は $\dfrac{{}_nC_1\times{}_{m-n}C_1}{{}_mC_2}=\dfrac{n(m-n)}{\frac{m(m-1)}{2}}=2\times\dfrac{n}{m}\times\dfrac{m-n}{m-1}$ であり、これはルール③の確率を示している。したがって、確率が等しいから当たりの本数の期待値は変わらない。

これは引くくじの本数を増やしても成り立つ。

> 当たりくじ n 本を含む m 本のくじがある。この中から r （ $1\leqq r\leqq n$ ）本のくじを引く場合、①同時に r 本のくじを引くときと、③１本ずつ r 回続けてくじを引く。引いたくじはもとにもどさない時の確率は変わらない。

ルール①で s 本当たる確率は

$$\frac{{}_nC_s\times{}_{m-n}C_{r-s}}{{}_mC_r}=\frac{\dfrac{{}_nP_s}{s\,!}\times\dfrac{{}_{m-n}P_{r-s}}{(r-s)!}}{\dfrac{{}_mP_r}{r\,!}}$$

$$=\frac{r\,!}{s\,!(r-s)!}\times\frac{n}{m}\times\frac{n-1}{m-1}\times\cdots\times\frac{(n-s+1)}{m-s+1}\times\frac{m-n}{m-s}\times\frac{m-n-1}{m-s-1}\times\cdots\times\frac{m-n-r+s+1}{m-r+1}$$

$$={}_rC_s\times\frac{n}{m}\times\frac{n-1}{m-1}\times\cdots\times\frac{(n-s+1)}{m-s+1}\times\frac{m-n}{m-s}\times\frac{m-n-1}{m-s-1}\times\cdots\times\frac{m-n-r+s+1}{m-r+1}$$

これはルール③の確率を示している。

３．３　ルール①とルール②の期待値は変わらないことの証明

ルール①とルール②の期待値は変わらないことを証明しよう。

> 当たりくじ n 本を含む m 本のくじがある。この中から 2 本のくじを引く場合、①同時に 2 本のくじを引くときと、②1 本ずつ 2 回続けてくじを引く。引いたくじはもとにもどす時の期待値は変わらない。

ルール①での期待値は

$$\frac{2\times{}_nC_2+1\times{}_nC_1\times{}_{m-n}C_1}{{}_mC_2}=\frac{2\times\dfrac{n(n-1)}{2}+n(m-n)}{\dfrac{m(m-1)}{2}}=\frac{2n(m-1)}{m(m-1)}=\frac{2n}{m}$$

ルール②での期待値は

$2\times{}_2C_2\times\left(\dfrac{n}{m}\right)^2+1\times{}_2C_1\times\dfrac{n}{m}\times\dfrac{m-n}{m}=\dfrac{2mn}{m^2}=\dfrac{2n}{m}$ となり、期待値は変わらない。

これは引くくじの本数を増やしても成り立つ。

> 当たりくじ n 本を含む m 本のくじがある。この中から r （$1\leqq r\leqq n$ ）本のくじを引く場合、①同時に r 本のくじを引くときと、②1 本ずつ r 回続けてくじを引く。引いたくじはもとにもどす時の確率は変わらない。

このことを示すために補題を２つ作ろう。

【補題３．１】

> $k\,{}_nC_k=n\,{}_{n-1}C_{k-1}$

証明　${}_nC_k=\dfrac{n\,!}{k\,!(n-k)!}=\dfrac{n}{k}\times\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\dfrac{n}{k}\,{}_{n-1}C_{k-1}$ 終

【補題２．２】（ヴァンデルモンドの畳み込み）

> $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_pC_k\times{}_qC_{n-k}={}_{p+q}C_n$
>
> ただし、 $p<k$ のとき ${}_pC_k=0$ とする。

証明　$(x+1)^{p+q}=(x+1)^p(x+1)^q$ を考える。

x^n の係数は左辺では ${}_{p+q}C_n$ である。

右辺は $\displaystyle\sum_{k_1=0}^{p}{}_pC_{k_1}x^{k_1}\sum_{k_2=0}^{q}{}_qC_{k_2}x^{k_2}$ となるから、 x^n の係数は $k_1+k_2=n$ となる k_1 、 k_2 に対応する項か

らでてくるから、 x^n の係数は $\sum_{k_1=0}^{n} {}_pC_{k_1} \times {}_qC_{k_2}$ 終

ルール①での期待値は$\sum_{s=0}^{r} s \frac{{}_nC_s \times {}_{m-n}C_{r-s}}{{}_mC_r}$であるから、【補題３．１】と【補題３．２】より

$$\sum_{s=1}^{r} s \frac{{}_nC_s \times {}_{m-n}C_{r-s}}{{}_mC_r} = \frac{n}{{}_mC_r} \sum_{s=1}^{r} {}_{n-1}C_{s-1} \times {}_{m-n}C_{r-s} = \frac{n}{{}_mC_r} \times {}_{m-1}C_{r-1}$$

$$= \frac{n \times r! \times (m-r)!}{m!} \times \frac{(m-1)!}{(r-1)!(m-r)!} = \frac{nr}{m}$$

ルール②での期待値は $\sum_{s=1}^{r} s \times {}_rC_s \left(\frac{n}{m}\right)^s \left(\frac{m-n}{m}\right)^{r-s}$ であるから、【補題３．１】より

$$\sum_{s=1}^{r} s \times {}_rC_s \left(\frac{n}{m}\right)^s \left(\frac{m-n}{m}\right)^{r-s} = \frac{r}{m^r} \sum_{s=1}^{r} {}_{r-1}C_{s-1} \times n^s \times (m-n)^{r-s} = \frac{rn}{m^r}(n+m-n)^{r-1} = \frac{nr}{m}$$

よってルール①とルール②は等しいことが示された。

§４　まとめ

日常生活のゲームはいろいろなルールで行われている。そのルールを数学的に分析してみると意外とすべてが同じことだったり、もっと効率的なルールがあったりする。いろいろな物事を数学的に分析してみると面白い。

【参考URL】

・高校数学の美しい物語「ヴァンデルモンドの畳み込みの3通りの証明」
https://manabitimes.jp/math/622