一次不定方程式　k は整数をなくしたら？

札幌創成高校

外山　尚生

§１　はじめに

次のような問題を作ってみた。

（１）一次不定方程式 $3x-5y=1$ を解け。

（２）方程式 $xy-x-2y=373$ を満たす整数 (x,y) の組をすべてかけ。

（３）連立方程式 $\begin{cases}3x-5y=1\\ xy-x-2y=373\end{cases}$ を満たす整数の組 (x,y) を求めよ。

（１）（２）で方程式を満たす x 、 y を求め、（３）でその共通する解を見つけることを意図して作った問題である。まずは意図通りに解いてみたい。

（１） $x=2$ 、 $y=1$ のとき $3\times2-5\times1=1$ だから

$$\begin{array}{rr} & 3x-5y\quad=1 \\ -) & 3\times2-5\times1=1 \\ \hline & 3(x-2)-5(y-1)=0 \end{array}$$

つまり $3(x-2)=5(y-1)$

3 と 5 は互いに素だから $x-2=5k$ 、 $y-1=5k$ （ k は整数）

よって $x=5k+2$ 、 $y=3k+1$

（２） $xy-x-2y=373$ より $(x-2)(y-1)=375$

x 、 y は整数より

$(x-2,y-1)=(1,375)(3,125)(5,75)(15,25)(25,15)(75,5)(125,3)(375,1)$

$(-1,-375)(-3,-125)(-5,-75)(-15,-25)(-25,-15)(-75,-5)(-125,-3)(-375,-1)$

よって $(x,y)=(3,376)(5,126)(7,76)(17,26)(27,16)(77,6)(127,4)(377,2)$

$(1,-374)(-1,-123)(-3,-74)(-13,-24)(-23,-14)(-73,-4)(-123,-2)(1,-374)$

（３）（２）の解の組の中で x は 5 で割った余りが 2 になりかつ、 y は 3 で割った余りが 1 になる組み合わせを考える。このうち k の値が一致するものは $(x,y)=(27,16)(-23,-14)$

当初はこの解答を考えていたが、一次不定方程式の解をそのまま $(x-2)(y-1)=375$ に代入してみた。すると以下のような考え方ができる。

$x=5k+2$ 、 $y=3k+1$ を $(x-2)(y-1)=375$ に代入すると $15k^2=375$　$\therefore\ k=\pm5$

よって $(x,y)=(27,16)(-23,-14)$

このように代入で求められる。ここで疑問が出てくる。 k が整数以外でもこの解法は成り立つのだろうか。（２）の式をいろいろ変えて、この解法が成り立つかどうか調べてみたい。

§２　（２）の式をいろいろ変えてみる

２．１　有理数の範囲で考えてみる。

次のような連立方程式を考えてみる。

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ xy-x-2y=-\dfrac{14}{15} \end{cases}$$

まずは普通に代入法で解くと

$y=\dfrac{3x-1}{5}$ より $x\times\dfrac{3x-1}{5}-x-\dfrac{6x-2}{5}=-\dfrac{14}{15}$

$9x^2-36x+20=0$

$(3x-2)(3x-10)=0$

$x=\dfrac{2}{3},\dfrac{10}{3}$

$x=\dfrac{2}{3}$ のとき $y=\dfrac{1}{5}$ 。 $x=\dfrac{10}{3}$ のとき $y=\dfrac{9}{5}$

これを $x=5k+2$ 、 $y=3k+1$ を代入して解いてみる。

$(x-2)(y-1)=\dfrac{16}{15}$ に代入すると

$15k^2=\dfrac{16}{15}$

$k=\pm\dfrac{4}{15}$

よって $(x,y)=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{9}{5}\right)\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{5}\right)$ となり、一致する。

２．２　無理数の範囲で考えてみる

次のような連立方程式を考えてみる。

$$\begin{cases} 3x-5y=1 \\ xy-x-2y=374 \end{cases}$$

まずは普通に代入法で解くと

$y=\dfrac{3x-1}{5}$ より $x\times\dfrac{3x-1}{5}-x-\dfrac{6x-2}{5}=374$

$3x^2-12x-1868=0$

$x=\dfrac{6\pm2\sqrt{1410}}{3}$

よって $(x,y)=\left(\dfrac{6+2\sqrt{1410}}{3},\dfrac{5+2\sqrt{1410}}{5}\right)\left(\dfrac{6-2\sqrt{1410}}{3},\dfrac{5-2\sqrt{1410}}{5}\right)$

これを $x=5k+2$ 、 $y=3k+1$ を代入して解いてみる。

$(x-2)(y-1)=376$ に代入すると

$15k^2=376$

$k=\pm\dfrac{2\sqrt{1410}}{15}$

よって $(x,y)=\left(\dfrac{6+2\sqrt{1410}}{3},\dfrac{5+2\sqrt{1410}}{5}\right)\left(\dfrac{6-2\sqrt{1410}}{3},\dfrac{5-2\sqrt{1410}}{5}\right)$となり、 一致する。

２．３　複素数の範囲で解いてみる

$$\begin{cases}3x-5y=1\\ xy-x-2y=-5\end{cases}$$

まずは普通に代入法で解くと

$y=\dfrac{3x-1}{5}$ より $x\times\dfrac{3x-1}{5}-x-\dfrac{6x-2}{5}=-5$

$3x^2-12x+27=0$

$x=2\pm\sqrt{5}\,i$

よって $(x,y)=\left(2+\sqrt{5}\,i,\dfrac{5+3\sqrt{5}\,i}{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\,i,\dfrac{5-3\sqrt{5}\,i}{5}\right)$

これを $x=5k+2$ 、 $y=3k+1$ を代入して解いてみる。

$(x-2)(y-1)=376$ に代入すると

$15k^2=376$

$k=\pm\dfrac{2\sqrt{1410}}{15}$

よって $(x,y)=\left(\dfrac{6+2\sqrt{1410}}{3},\dfrac{5+2\sqrt{1410}}{5}\right)\left(\dfrac{6-2\sqrt{1410}}{3},\dfrac{5-2\sqrt{1410}}{5}\right)$となり、一致する。

２．４　一次不定方程式の表しているもの

このように考えると、一次不定方程式の解を拡張すると、方程式を媒介変数 k を使って表したものであるということがわかる。実際、 $3x-5y$ に $x=5k+2$ 、 $y=3k+1$ を代入すると

$3(5k+2)-5(3k+1)=1$ が成り立つ。

§３　おわりに

一次不定方程式の解は媒介変数表示であるという結論。自分でレポートを書いておいてあれだが、あたりまえで、あまり面白くない結論になってしまった。ちょっと物足りないので媒介変数表示を使って少し遊んでみた。

$3x-5y=1$ より $y=\dfrac{3}{5}x-\dfrac{1}{5}$ 。一次不定方程式で媒介変数表示すると $\begin{cases}x=5k+2\\ y=3k+1\end{cases}$

（１）微分してみる

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dk}}{\dfrac{dx}{dk}}=\frac{5}{3}$$

（２）積分してみる

$$\int_2^7\left(\frac{3}{5}x-\frac{1}{5}\right)dx=\int_0^1(3k+1)\times 5dk$$

（３）曲線の長さ

$$\int_2^7\sqrt{1+\left(\frac{3}{5}\right)^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{5^2+3^2}\,dk$$

うーん。媒介変数表示。あまり発展しないなあ。