「面積図利用法」

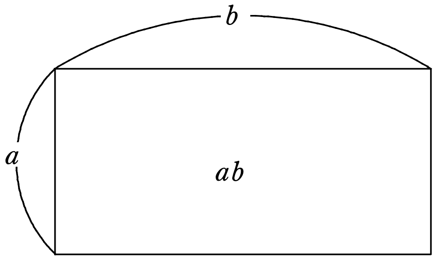
札幌創成高校
外山尚生

§０　はじめに

　数式を面積に見立てて考える面積図。中学入試や中学校で使われることが多いこの手法を展開、因数分解、平方完成に応用して考えたところ、式変形の持つ意味が目に見える形になった。

§１　面積図

　面積図は２数の積 ab を縦 a 、横 b の長方形の面積として考えるものである。



この長方形を分割したり、付け加えたりして考える。

§２　展開、因数分解

２．１　展開

　例えば、 $(x+2)(x+5)$ の展開は次の長方形を考えればよい。

	x	5
x	x^2	$5x$
2	$2x$	10

$$\begin{aligned}(x+2)(x+5) &= x^2+5x+2x+10\\ &= x^2+7x+10\end{aligned}$$

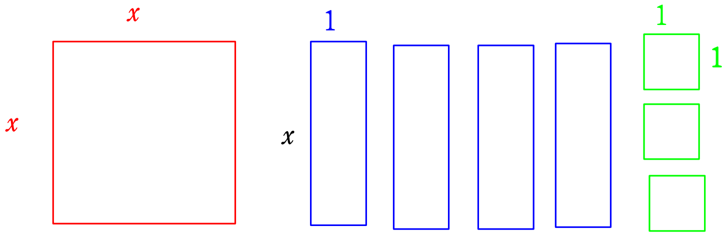
　これを考えると、例えば $(x+2y+1)^2$ の展開をミスなく展開することができる。

	x	$2y$	1
x	x^2	$2xy$	x
$2y$	$2xy$	$4y^2$	$2y$
1	x	$2y$	1

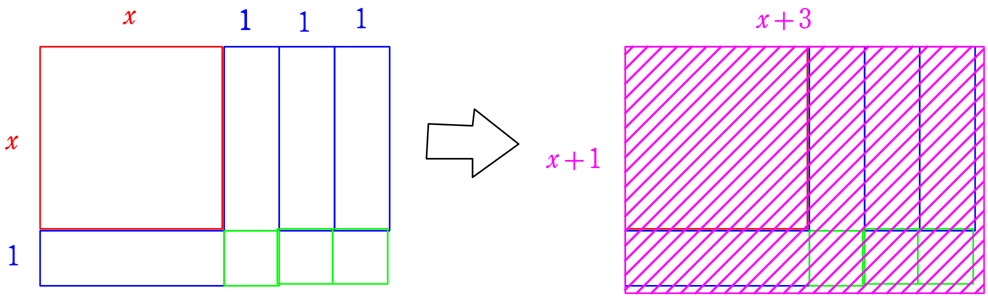
$$(x+2y+1)^2 = x^2+4y^2+1+4xy+2x+4y$$

２．２　因数分解

　例えば、 x^2+4x+3 を因数分解するとき、 $x\times x$ の正方形１枚と $1\times x$ の長方形４枚と 1×1 の正方形３枚を組み合わせて長方形を作ればよい。

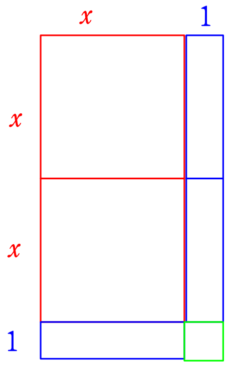


次のように組み合わせれば長方形を作ることができる。



$$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$$

例えば $2x^2+3x+1$ の因数分解も次のような長方形で作ることができる。



$$2x^2+3x+1=(2x+1)(x+1)$$

なお、因数分解は１通りにしか表すことができないから、長方形は1通りしかつくることはできない。

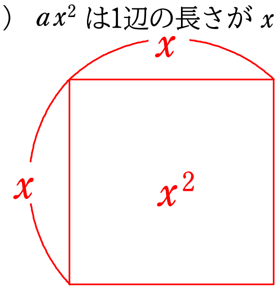
§３　平方完成を面積図で考える。

３．１　準備と目標

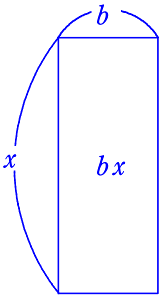
　平方完成は $y=ax^2+bx+c$ を $y=a(x+p)^2+q$ の形にすることが目標である。

　そこで $y=ax^2+bx+c$ について、次のように考えよう。

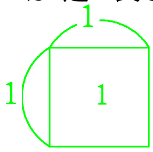
（１） ax^2 は1辺の長さが x の正方形が a 枚あると考える。



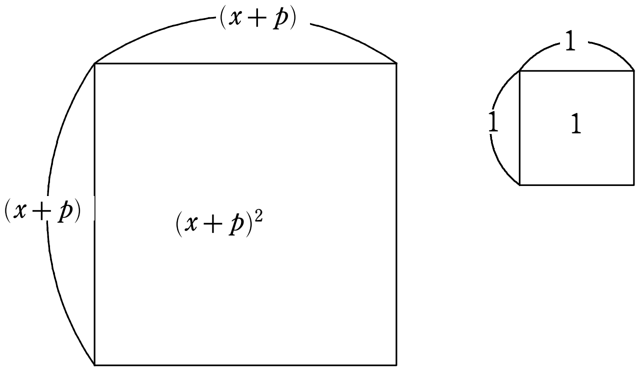
（２） bx は縦の長さが x 、横の長さが b の長方形と考える。



（３） c は1辺の長さが１の正方形が c 枚と考える。

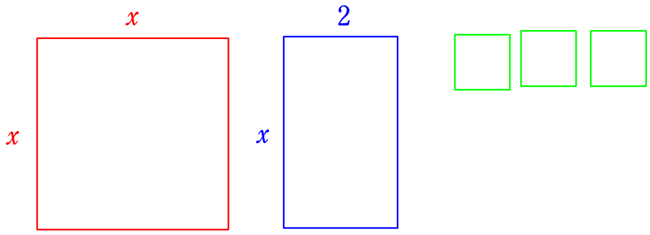


目標は $y=a(x+p)^2+q$ の形にすること。つまりすべての図形を正方形にすることが目標である。



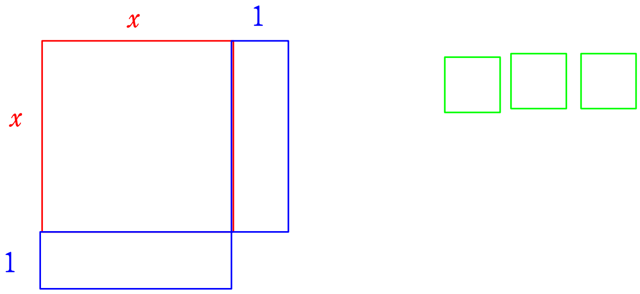
<u>３．２　$y=x^2+2x+3$ を平方完成する。</u>

（１） $x\times x=x^2$ 1枚と $2\times x$ １枚と 1×1 3枚のカードを準備する。

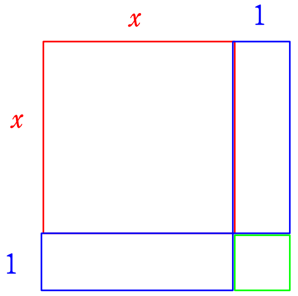


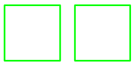
x^2+2x+3

（２） $2\times x$ のカードを半分にして下の図のように並べる。



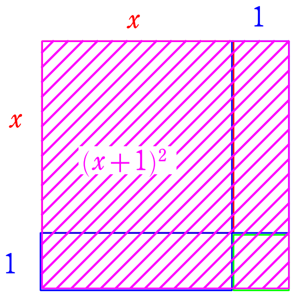
（3）空いている穴に 1×1 のカードを 1 枚入れる。

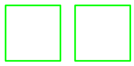




$(x+1)^2-1+3$

（4）平方完成ができる



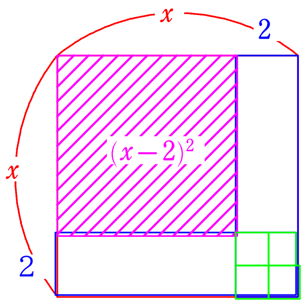


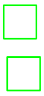
$(x+1)^2+2$

このように考えると平方完成の意味が目に見えてわかりやすい。

３．３　$y=x^2-4x+6$ を平方完成する。

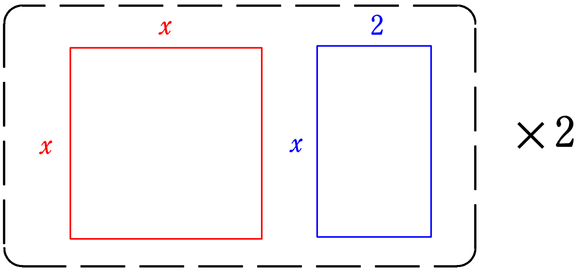
$y=x^2-4x+6$ を平方完成すると次のような面積図になる。

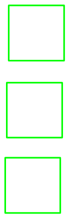




３．４　$y=2x^2+4x+3$ を平方完成する。

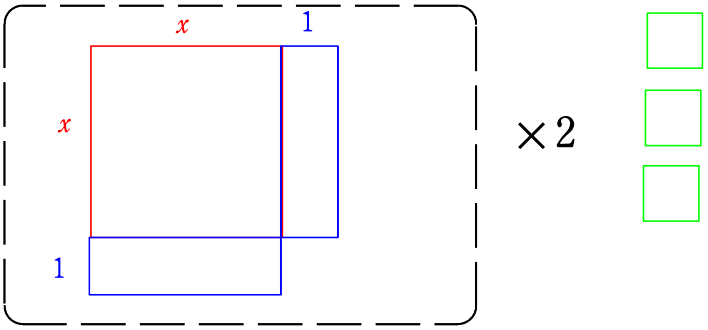
（1） $x\times x$ と $4\times x$ のカードを2組に分ける。（1×1 のカードは後から入れるので分けない）



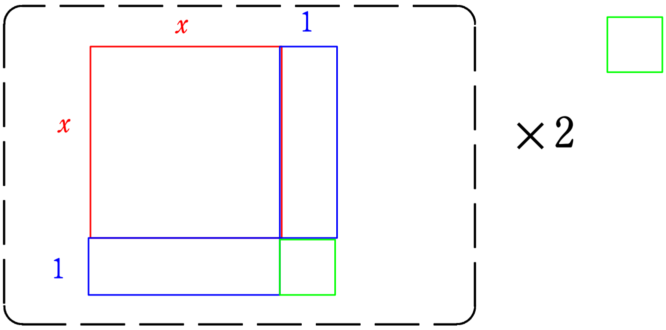


$2(x^2+2x)+3$

（2）青のカードを半分にして図のように並べる。

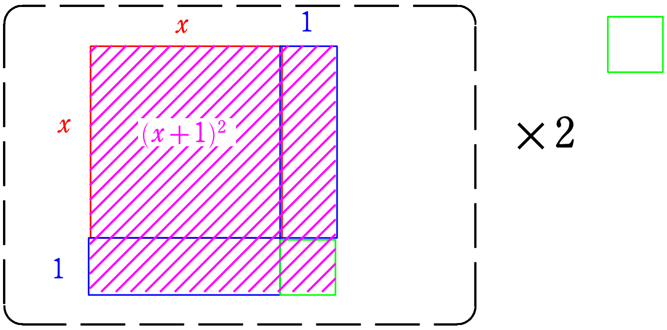


（3）空いている部分に 1×1 のカードを入れる。（2組あるから 1×2＝2 枚入れる。）



$2(x+1)^2-1\times2+3$

（4）平方完成ができる



$2(x+1)^2+1$

§４　高校の式変形を面積図で考えてみる。

４．１　約数の和

例えば、 $N=p^a\times q^b$ （ p 、 q は素数）の正の約数の和は次のような式で表せる

$$(1+p+p^2+\cdots+p^a)(1+q+q^2+\cdots+q^b)=\left(\sum_{k=0}^{a}p^k\right)\left(\sum_{l=0}^{b}q^l\right)$$

これを面積図を使って考えてみよう。

例えば $72=2^3\times3^2$ の正の約数の和は面積図を考えると次の式で表せることがわかる。

	1	2	2^2	2^3
1	1	2	2^2	2^3
3	3	2×3	$2^2\times3$	$2^3\times3$
3^2	3^2	2×3^2	$2^2\times3^2$	$2^3\times3^2$

$(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)$

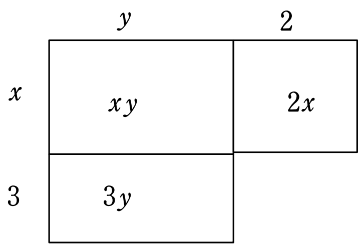
この図を考えると正の約数の個数は長方形の個数だから 3×4＝12 個であることもわかる。

4．2　一次の積への変形

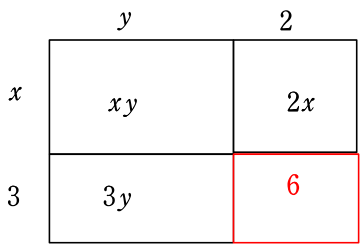
　例えば、 $xy+2x+3y=(x+3)(y+2)-6$ と変形できる。

　これを面積図で考えてみよう。

　$xy+2x+3y$ を面積図で表すと次のようになる。



ここから長方形を作ると考えると、 $2\times3=6$ の長方形が足りないことに気づく。



したがって $xy+2x+3y=(x+3)(y+2)-6$ の変形ができることがわかる。

§５　まとめ

　面積図を使うことによって、平方完成の意味づけができるようになった。平方完成は方法論の暗記数学になりがちであるが、面積図をつかうことで「なるほど。確かに」という思いで平方完成を見ることができた。高校数学で使う式変形も、今までは何となくの式変形で捉えていたものが、ただの文字の羅列でしかない式を図形という目に見える形で表現することでわかりやすく、楽しい授業にすることができたと思う。