あなたは大学のテスト問題作成者です。数学ⅡB（微積を除く）をテーマとした問題を2題作成して、その解答を作ってください。

注意
- ・制成の5選抜理系の生徒が10分～15分で解ける記述式問題で作成してください。
- ・数学ⅡBがメインテーマですが、ⅠAや微積を使ってもかまいません。
- ・写メに撮って、ロイロ提出箱で提出してください。

問題

② バスケットボール部の2年生3人、1年生3人、顧問2人の計8人が円になって並ぶとき、次のような並び方は何通りあるか。

(i) すべての並び方

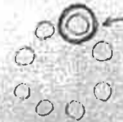
(ii) 顧問が2人隣り合う並び方

(iii) 2年生のどの2人も隣り合わない並び方

解答

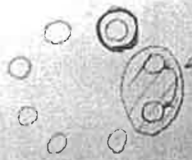
(i) 7! = 7×6×5×4×3×2×1

5,040通り



(ii) 顧問2人を1人と考え、計7人の並び方が6!通り、

顧問2人の並び方が2!通り



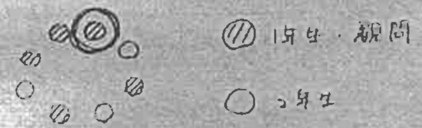
6! × 2! = 6×5×4×3×2×1×2×1

= 720×2

= 1440通り

(iii) 1年生3人と顧問2人、計5人の並び方が4!通り、

その間の3ケ所に2年生が1人ずつ並ぶ並び方が3!通り



4! × 3! = 4×3×2×1×3×2×1

= 144通り

② 参考資料4

数学B　S選抜理系　学年末考査　問題用紙

4題以上選択して記述しなさい。解答用紙には解答する番号を書くこと。

1 複素数平面

複素数 z は $|z|=1$ を満たしている。

（1） z の共役な複素数 $\overline{z}$ を z を用いて表せ。

（2） 次の問いに答えよ。

(a) z の実部 $Re(z)$ を z を用いて表せ。

(b) $|z|=1$ を複素数平面上に表した時の図形的意味を考えて $z+\frac{1}{z}$ の値の範囲を求めよ。

（3） $|z^2-\overline{z}|$ の値の範囲を求めよ。

2 複素数平面

複素数 $\alpha=1+\sqrt{3}i$、 $\beta=1-\sqrt{3}i$ とする。

（1） α と β をそれぞれ極形式の形で表せ。

（2） $\frac{\alpha^8}{\beta^7}$ の値を求めよ。

（3） $z^4=-8\beta$ を満たす複素数 z は4つある。これら4つの複素数を求めよ。

3 複素数平面

複素数平面上で、0でない複素数 z を表す点をAとする。

複素数 $(1+i)z$、 $\frac{z}{1+i}$ を表す点をそれぞれB、Cとし、原点をOとする。

（1） ∠AOBと∠BOCを求めよ。

（2） $|z|=1$ のとき四角形OBACの面積を求めよ。

（3） 四角形OBACの対角線OAとBCの交点をDとする。BD:BCを求め、Dを表す複素数を z を用いて表せ。

4 複素数平面

複素数平面上の点 z が次の条件を満たすとき、 z の描く図形を図示せよ。

（1） $|z-3i|=|z|$ 。

（2） $|z-3i|=2|z|$ 。

（3） w を実数全体とするとき、 $w=z+\frac{1}{z}$ 。

3参考資料4

5 図形と方程式

（1） 二次方程式 $x^2+5x+6=0$ の解を α、 β とする。 $\alpha^2+\beta^2$ の値を求めよ。

（2） 直線 $y=mx$ が放物線 $y=x^2+1$ と異なる2点P、Qで交わるとする。

（a） m の取りうる値の範囲を求めよ。

（b） 線分PQの中点Mの軌跡を図示せよ。

6 三角関数

$0\leqq\theta\leqq2\pi$ とする。

（1） $y=\cos\theta$ の最大値と最小値を求めよ。またその時の θ の値を求めよ。

（2） $y=\sin^2\theta+\cos\theta+1$ の最大値と最小値を $\cos\theta=x$ と置くことによって求めよ。またその時の θ の値を求めよ。

（3） $y=\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{1}{\cos^2\theta}$ の最小値を $\tan\theta=t$ と置くことによって求めよ。また、その時の θ の値を求めよ。

7 指数対数

$\log_{10}2=0.3010$ 、 $\log_{10}3=0.4771$ とする。

（1） $\log_{10}4$ 、 $\log_{10}5$ 、 $\log_{10}6$ の値を求めよ。

（2） $48<49<50$ であることを用いて $\log_{10}7$ を小数第2位まで求めよ。

（3） 2^{2021} は何桁の数か、また、最高位の数を求めよ。

8 数列

（1） 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=\frac{3}{4}n(n+3)$ とする。

（a） 初項 a_1 と a_n の一般項を求めよ。

（b） $\sum_{k=1}^{n}ka_k$ が3の倍数になることを証明せよ。

（2） 異なる3つの数 x、 y、 z があり、 $x+y+z=3$ を満たしている。

x、 y、 z はこの順で等差数列であり、 z、 x、 y の順で等比数列である。

3つの数 x、 y、 z を求めよ。

9 ベクトル

1辺の長さが2の正四面体OABCがある。辺OAを2:3に内分する点をP、辺ABを4:1に内分する点をQ、辺OCを3:2に内分する点をRとする。平面PQRと直線BCとの交点をHとする。 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$、 $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$、 $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。

（1） $\overrightarrow{OP}$、 $\overrightarrow{OQ}$、 $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$、 $\vec{b}$、 $\vec{c}$ を用いて表せ。

（2） $BH:HC$ を求めよ。

（3） $|\overrightarrow{OH}|$ を求めよ。

数B　前期期末試験　解答へのアプローチ

1 平面ベクトルの問題。

（1）ベクトルの大きさ。vol.4参照。定義通りでいいでしょう。

答 $|\vec{a}|=5$

（2）vol.4参照。平行なベクトルは $k\vec{a}$ 。単位ベクトルは大きさが１。ここでは $\vec{a}$ の大きさが5だから $\pm\frac{1}{5}$ すればよい。

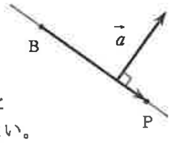
答 $\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)$

（3）vol.7参照。求めるベクトルを $\vec{b}=(x,y)$ とおいて、
垂直だから $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ …①。単位ベクトルだから $|\vec{b}|=1$ …②
①②から求める。

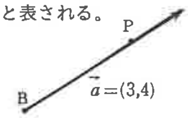
答 $\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)$

参考 ①より $(-4,3)$ は垂直なベクトルだとわかる。この大きさは５だから $\pm\frac{1}{5}$ 倍すればよいと考えてもよい。

（4）vol.17参照。法線ベクトルとは直線に対して垂直なベクトル。
$B(1,2)$、 $P(x,y)$ とするなら
$\vec{a}\perp\overrightarrow{BP}$ より $\vec{a}\cdot\overrightarrow{BP}=0$
答　$3x+4y=11$
参考　$ax+by+c=0$ の法線ベクトルは
$\vec{n}=(a,b)$ だから、逆に考えて $3x+4y+c=0$ と考えられる。これが $(1,2)$ を通ると考えてもよい。



（5）vol.15。 $B(1,2)$、 $P(x,y)$ とおくと $\overrightarrow{BP}=t\vec{a}$ と表される。
ここから t を消去すると直線の式がでてくる。
これがBPを通る直線の式。
では、これを長さ３の線分にするためにどうするか？



$|\vec{a}|=5$ であることに注目。$|\overrightarrow{BP}|=3$ にしたいのだから、 $t=\frac{3}{5}$ にすればよい。ここから右の端の x の値がわかる。

答　$4x-3y=-2\left(1\leqq x\leqq\frac{14}{5}\right)$

2 平面ベクトルの問題。

（1）vol.3。vol.12。ここは簡単。たどったり縮めたりすればよいだけ。

答 $\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\vec{b}$　$\overrightarrow{OD}=\frac{2}{3}\vec{a}$　$\overrightarrow{OE}=\frac{1}{2}\vec{b}$　$\overrightarrow{OF}=\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{a}$

（2）vol.13。 $\overrightarrow{OG}$ について２つの視点から式を立てる。
① $\overrightarrow{OG}$ は $\overrightarrow{OC}$ を縮めたもの。→ $\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OC}$
②GはEA上→ $EG:GA=1-s:s$ → $\overrightarrow{OG}=(1-s)\vec{a}+s\overrightarrow{OE}$
ここから一次独立性を使って連立を立てて求める。

答 $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$

参考 Gは△OABの重心である。平行四辺形の対角線は中点で交わるからOCとAEは中線になる。
参考 $OE /\!/ AC$ に気が付けば $EG:GA=OG:GC=OE:AC=1:2$ がわかる。これを使うと簡単に求められる。

（3）vol.13。 $\overrightarrow{OH}$ について２つの視点から式を立てる。
①HはAE上→EG：GA＝ $t:1-t$ → $\overrightarrow{OH}=(1-t)\overrightarrow{OE}+t\overrightarrow{OA}$
②HはDF上→DH：HF＝ $u:1-u$ → $\overrightarrow{OH}=(1-u)\overrightarrow{OD}+u\overrightarrow{OF}$
ここから一次独立性を使って連立を立てて求める。

答 $\overrightarrow{OH}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{1}{5}\vec{b}$

3 空間ベクトルの問題。メインは空間のvol.12。今年の室蘭工大の問題に誘導を付けたものです。

（1）vol.1。おしり引くまえ。

答 $\overrightarrow{AB}=(-4,2,0)$　$\overrightarrow{AC}=(-2,0,1)$

（2）vol.1、2。大きさ、内積を求める。定義通り。

答 $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{5}$　$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=8$

（3）vol.４。面積公式にあてはめる。

答 $S=3$

（4）vol.4とvol.8。Hについて３つの特徴を見つけ、式を立てる。
①Hは平面ABC上にある→ $\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ → $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$
→計算すると $\overrightarrow{OH}=(2-4s-2t,-1+2s,1+t)$ …☆
② $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ → $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ → $20s+8t-10=0$
③ $\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ → $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ → $8s+5t-3=0$
以上から連立を解き求める。 $s=\frac{13}{18}$ 、 $t=-\frac{5}{9}$ 。これを☆に代入。

答 $H\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)$

（5）四面体の体積は V＝底面積×高さ× $\frac{1}{3}$

底面積は（３）で求めた。高さは $\overrightarrow{OH}=\left(\frac{2}{9},\frac{4}{9},\frac{4}{9}\right)$ より大きさを求める。

答 $V=\frac{2}{3}$

発展 外積を使って求めてもよい。
参考 これが室工レベルの問題です。

5参考資料

前期期末考査　解答シート

数学Ⅱ　数学B　問題番号→ $\boxed{1}$

$\vec{a}=(3,4)$

(1) $\vec{a}$の大きさ$|\vec{a}|$　　$|\vec{a}|=\sqrt{9+16}$　$\underline{5}$ //

(2) $\vec{a}$と平行な単位ベクトルを2つ成分で表す。

↳ $\frac{1}{5}\vec{a}$, $-\frac{1}{5}\vec{a}$ ⟹ $\underline{\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{5},-\frac{4}{5}\right)}$ //

(3) $\vec{a}$と垂直な単位ベクトルを2つ成分で表す。

$\vec{e}=(x,y)$とする。　$|\vec{e}|=\sqrt{x^2+y^2}=1$　　$x^2+y^2=1$ ―①

$\vec{a}\perp\vec{e}$より　$\vec{a}\cdot\vec{e}=3x+4y=0$　　$y=-\frac{3}{4}x$ ―②

②を①に代入

$x^2+\frac{9}{16}x^2=1$　　$\frac{25}{16}x^2=1$　　$x^2=\frac{16}{25}$　　$x=\pm\frac{4}{5}$ ⇨②に代入

$x=\frac{4}{5}$のとき $y=-\frac{3}{5}$　$\underline{\left(\frac{4}{5},-\frac{3}{5}\right)}$ //　$x=-\frac{4}{5}$のとき $y=\frac{3}{5}$　$\underline{\left(-\frac{4}{5},\frac{3}{5}\right)}$ //

(4) 点(1,2)を通り, $\vec{a}$が法線ベクトルである直線の方程式

B(1,2), P(x,y)とする。

$\vec{a}\perp\overrightarrow{BP}$より　$\vec{a}\cdot\overrightarrow{BP}=0$　　$(3,4)\cdot(x-1,y-2)=0$　　$\underline{3x+4y=11}$ //

(5) …点B(1,2)を端点とし, $\vec{a}$が方向ベクトルである長さが3の線分の方程式

…$\overrightarrow{BP}=t\vec{a}$と表される

↳ t消去で直線の式が出る。

$(x-1,y-2)=(3t,4t)$

$\begin{cases} x-1=3t \\ y-2=4t \quad ―☆ \end{cases}$　　$3t=x-1$　　$t=\frac{x-1}{3}$

$t=\frac{x-1}{3}$を☆に代入

$y-2=4\times\frac{x-1}{3}$

$y=\frac{4x-4}{3}+2$

$y=\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}+\frac{6}{3}$

$=\frac{4}{3}x+\frac{2}{3}$

$\frac{4}{3}x-y=-\frac{2}{3}$　　両辺に ×3

$4x-3y=-2$

$|\vec{a}|=5$　$|\overrightarrow{BP}|$=3にしたいから $t=\frac{3}{5}$にすればいい。

$\underline{4x-3y=-2\left(1\leqq x\leqq\frac{14}{5}\right)}$ //

↳ $t=\frac{3}{5}$を $t=\frac{x-1}{3}$に代入

$\frac{3}{5}=\frac{x-1}{3}$　　両辺×15

$9=5x-5$

$5x=14$　　$x=\frac{14}{5}$

5 参考資料