因数分解をいろいろな道のりで解いてみよう

札幌創成高校　　　外山尚生

§０　はじめに

因数分解は中学校でも勉強しているがために一つの道のりで解いてしまいがちだ。

しかし、因数分解を視点を変えて見てみると違った景色を楽しむことができる。

そんな因数分解の旅を味わってみたい。

§１　$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

中学校で習った「たして、かけて」の式である。

ここでは $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ を例にいろいろな道のりから求めてみたい。

１．１　中学校のやり方

展開の式 $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ を右辺から左辺にみることで公式

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

が導かれる。

そこでたして５、かけて 6になる２数を考えると 2 と 3 であることがわかる。

よって $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ と因数分解できる。

ちなみにたして５、かけて 6になる２数を考える時にはかけて 6 から考えるとよい。

１．２　共通因数をくくりだすことによって求めるやり方

$$\begin{aligned} x^2+5x+6 &= x^2+2x+3x+6 \\ &= x(x+2)+3(x+2) \\ &= (x+2)(x+3) \end{aligned}$$

このように求めると展開の式を考えずに共通因数をくくりだすのみで求めることができて面白い。

１．３　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使って求めるやり方

$$\begin{aligned} x^2+5x+6 &= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}+6 \\ &= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{4} \\ &= \left(x+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right) \\ &= (x+3)(x+2) \end{aligned}$$

平方完成を行い、求める方法である。解の公式の導出にもつながっていて面白い。

１．４　方程式の解を使って求めるやり方

$x^2+5x+6=0$ を解の公式を使って解くと $x=\dfrac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times1\times6}}{2}=\dfrac{-5\pm1}{2}=-2,-3$ より

$x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$ と因数分解することができる。

因数分解をした結果が方程式の解と結びつくことを利用した。解の公式を使わなければならないため面倒だが、因数分解と二次方程式の解が結び付いているという意識は大切である。

§２　$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

§１を応用してたすき掛けをいろいろな視点からみてみたい。

ここでは $8x^2+22x+15=(2x+3)(4x+5)$ を例にいろいろな道のりから求めてみたい。

２．１　たすき掛け

展開の式 $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$ を右辺から左辺にみることで公式

$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$

が導かれる。

これは下のようなたすき掛けを使って求めることができる。

$$
\begin{array}{cccc}
ax & b & \longrightarrow & bcx \\
cx & d & \longrightarrow & adx \\
\hline
acx^2 & bd & & (bc+ad)x
\end{array}
$$

ここで次のようなたすき掛けが成り立つから

$$
\begin{array}{cccc}
2x & 3 & \longrightarrow & 12x \\
4x & 5 & \longrightarrow & 10x \\
\hline
8x^2 & 15 & & 22x
\end{array}
\quad \cdots☆
$$

$8x^2+22x+15=(2x+3)(4x+5)$ が導かれる。

２．２　共通因数をくくりだすことによって求めるやり方

$$
\begin{aligned}
8x^2+22x+15&=8x^2+12x+10x+15\\
&=4x(2x+3)+5(2x+3)\\
&=(4x+5)(2x+3)
\end{aligned}
$$

２．１の☆のたすき掛けから $22x=12x+10x$ に分けることによって共通因数をくくりだして求めることができる。たすき掛けを単なる暗記にしない方法として一度はやってみたい方法である。

２．３　$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ を使って求めるやり方

$$
\begin{aligned}
8x^2+22x+15&=8\left(x^2+\frac{11}{4}x+\frac{15}{8}\right)\\
&=8\left\{\left(x+\frac{11}{8}\right)^2-\frac{121}{64}+\frac{15}{8}\right\}\\
&=8\left\{\left(x+\frac{11}{8}\right)^2-\frac{1}{64}\right\}\\
&=8\left(x+\frac{11}{8}+\frac{1}{8}\right)\left(x+\frac{11}{8}-\frac{1}{8}\right)\\
&=8\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)\\
&=2\left(x+\frac{3}{2}\right)\times4\left(x+\frac{5}{4}\right)\\
&=(2x+3)(4x+5)
\end{aligned}
$$

と因数分解することができる。これならたすき掛けをしなくても求めることができる。

２．４　方程式の解を使って求めるやり方

$8x^2+22x+15=0$ を解の公式を使って解くと

$$x=\frac{-22\pm\sqrt{22^2-4\times8\times15}}{16}=\frac{-22\pm2}{16}=-\frac{3}{2},-\frac{5}{4}$$ より

$$8x^2+22x+15=8\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{5}{4}\right)=2\left(x+\frac{3}{2}\right)\times4\left(x+\frac{5}{4}\right)=(2x+3)(4x+5)$$

と因数分解することができる。

§３　x^n-1 の因数分解

３．１　x^n-1 の式変形

x^n-1 の式変形について、 $n=2$ 、 $n=3$ のときは次の公式からすぐに導かれる。

［公式３．１］

１．　$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
２．　$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
３．　$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

この公式で $a=x$ 、$b=1$ のときを考えると次の式を作ることができる。

［命題３．２］

１．　$x^2-1=(x+1)(x-1)$
２．　$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$
３．　$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

この命題から次の命題が成り立つ。

［命題３．３］

$$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots\cdots+x+1)=(x-1)\left(\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}\right)$$

［証明］

$x\fallingdotseq1$ のとき

$S_n=\sum_{k=1}^{n}x^{k-1}=1+x+x^2+\cdots\cdots+x^{n-1}$ とおく。

$xS_n=x+x^2+x^3+\cdots\cdots+x^n$ より

$xS_n-S_n=x^n-1$

よって $x^n-1=(x-1)S_n$ が成り立つ。

$x=1$ のときもこの式は成り立つことは明らかである。

参考　これは等比数列の和の公式を変形したものである。

３．２　$x^n-1=0$ の解

$x^n-1=0$ の解を１の n 乗根といい、次の式で表すことができる。

［補題３．４］

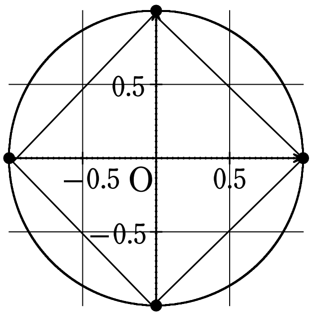
$x^n=1$ の解は $x=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n}$　（$k=0,1,2,\cdots,n-1$）

［証明］

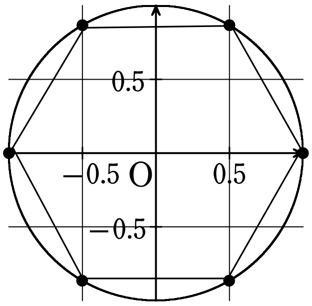
ド･モアブルの公式 $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$ より $x^n=\cos2\pi k+i\sin2\pi k=1$ 。

参考 これは複素数平面上における原点中心半径1の円に内接する正 n 角形の各頂点である。

$n=4$



$n=6$



ここから次の命題が成り立つ。

［命題３．５］

$$x^n-1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \qquad \text{ただし、} \alpha_n=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n}$$

３．３　x^4-1 の因数分解

３．１、３．２で導き出した命題を用いて、x^4-1 を因数分解してみよう。

［解法１］　命題３．２を用いた解法

$x^4-1=(x^2)^2-1=(x^2-1)(x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

これが一番易しい解法である。

［解法２］　命題３．３を用いた解法

$x^4-1=(x-1)(x^3+x^2+x+1)=(x-1)\{x^2(x+1)+(x+1)\}=(x-1)(x+1)(x^2+1)$

［解法３］　命題３．５を用いた解法

$\alpha_1=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i \qquad \alpha_2=\cos\frac{2\pi}{2}+i\sin\frac{2\pi}{2}=-1$

$\alpha_3=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i \qquad \alpha_4=\cos\frac{4\pi}{2}+i\sin\frac{4\pi}{2}=1$ より

$x^4-1=(x-i)(x+1)(x+i)(x-1)=(x+1)(x-1)(x^2-i^2)=(x+1)(x-1)(x^2+1)$

３．４　x^6-1 の因数分解

x^6-1 の因数分解は視点のつけかたでいろいろ考えられる。

［解法１］　$x^6-1=(x^3)^2-1$ と考えて命題３．２を用いた解答

$x^6-1=(x^3)^2-1=(x^3+1)(x^3-1)=(x+1)(x^2-x+1)(x-1)(x^2+x+1)$

これが一番易しい解答である。

［解法２］　$x^6-1=(x^2)^3-1$ と考えて命題３．２を用いた解答

$x^6-1=(x^2)^3-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$

ここで、$x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+1+x)(x^2+1-x)$　…①

よって $x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

視点を少し変えると途端に難しくなる。

［解法３］　命題３．３を用いた解法

$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=(x-1)\{x^4(x+1)+x^2(x+1)+(x+1)\}$

$=(x-1)(x+1)(x^4+x^2+1)$

①より $x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

[解法４]命題３．５を用いた解法

$\alpha_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　$\alpha_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\alpha_3=\cos\frac{3\pi}{3}+i\sin\frac{3\pi}{3}=-1$　　$\alpha_4=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$

$\alpha_5=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$　　$\alpha_6=\cos\frac{6\pi}{3}+i\sin\frac{6\pi}{3}=1$ より

$x^6-1=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x+1)(x-\alpha_4)(x-\alpha_5)(x-1)$

ここで

$(x-\alpha_1)(x-\alpha_5)=x^2-(\alpha_1+\alpha_5)x+\alpha_1\alpha_5=x^2-x+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i^2\right)=x^2-x+1$

$(x-\alpha_2)(x-\alpha_4)=x^2-(\alpha_2+\alpha_4)x+\alpha_2\alpha_4=x^2+x+\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i^2\right)=x^2+x+1$ だから

よって $x^6-1=(x+1)(x-1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)$

§４　まとめ

因数分解ひとつとってみても、たかが因数分解されど因数分解。いろいろなアプローチが考えられて楽しめる。

教科書に書かれている解答は一番の近道であるが、時には遠回りをしてみることで、楽しい数学の世界や頭を使った式変形など楽しい数学の旅ができる。

新幹線や飛行機で最短距離を進む旅もいいが、時にはこういうのんびりとした数学の旅もいいもんだ。