いろいろな解法ができる問題を考えてみた

札幌創成高等学校

外山　尚生

数学の楽しみはいろいろな解法が考えられるところにある。そこで今回、いろいろな解法が考えられる問題を考えてみた。授業でグループワーク、テストに出してみるなどいろいろな活用をしてみてください。

問題１【単元】三角比、三角関数

$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。方程式$\sin\theta = \cos\theta$ を解け。

問題２【単元】集合論理

H大学の入学生にアンケート調査をしたところ、H大学の入学生は全員キクタンを勉強していたことがわかった。ここから命題「H大学に入学しているならばキクタンを勉強している」は真であることがわかる。そこでH大学に入学したいA君はキクタンを勉強した。A君のこの行動は正しいか？なぜそういえるのか理由も述べなさい。

問題３【単元】平面図形、三角比、三角関数

一辺の長さが1の正五角形の対角線の長さを求めよ。

問題４【単元】図形と方程式、三角関数

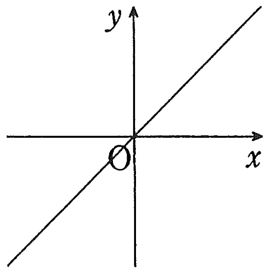
点Pの座標を(x, y)とし、$x = r\cos\theta$ 、$y = r\sin\theta$ とする。

ただし、rとθの範囲は$1 \leqq r \leqq 2$、$\frac{1}{2} \leqq \tan\theta \leqq 3$ （$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$）とする。点Pの存在する領域内の$(x, y)$における$x + y$の最大値と最小値を求めよ。

問題１

$0° \leqq \theta \leqq 90°$ とする。方程式 $\sin\theta = \cos\theta$ を解け。

【解答１】



$\sin\theta = \frac{y}{r}$、$\cos\theta = \frac{x}{r}$ とおくと、$\sin\theta = \cos\theta$ より $\frac{y}{r} = \frac{x}{r}$。

$\therefore x = y$

よって、$\theta = 45°$

【解答２】

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $2\sin^2\theta = 1$

$\sin\theta > 0$ より $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

よって $\theta = 45°$

【解答３】

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\theta}{\sin\theta} = 1$ より

$\theta = 45°$

【解答４】

$\cos\theta = \sin\theta = \cos(90 - \theta)$ より

$90 - \theta = \theta$ だから $\theta = 45°$

【解答５】

$\sin\theta - \cos\theta = 0$

$\sqrt{2}\sin(\theta - 45°) = 0$

$\sin(\theta - 45°) = 0$

$\theta - 45° = 0°$ だから $\theta = 45°$

【コメント】

三角比に関する公式をどれも使っても求められる問題なだけに楽しい。数学Ⅱの三角関数の知識を使うと、解答５の幅が広がる（というか、数学Ⅱの知識を使うとこっちの解答を使う人が一気に多くなって面白い）。$0° \leqq \theta \leqq 90°$ の制限がなくなると、解答２の解法は吟味が必要になる。単純な問題であるが、幅広い解法ができるのでグループワークもさせたい問題である。

問題2

H大学の入学生にアンケート調査をしたところ、H大学の入学生は全員キクタンを勉強していたことがわかった。ここから命題「H大学に入学しているならばキクタンを勉強している」は真であることがわかる。そこでH大学に入学したいA君はキクタンを勉強した。A君のこの行動は正しいか？なぜそういえるのか理由も述べなさい。

【解答１】

命題「H大学に入学しているならばキクタンを勉強している」が真であるから、キクタンを勉強していることはH大学に入学するための必要条件であるが、十分条件であるかどうかはわからない。よってキクタンを勉強したからと言って、全員がH大学に入学できるとは限らないのでA君の行動は正しくない。

【解答２】

命題「H大学に入学しているならばキクタンを勉強している」が真であるから、キクタンを勉強していることはH大学に入学するための必要条件である。したがってH大学に入学するためにはキクタンを勉強する必要があるのであり、A君の行動は正しい。

【コメント】

「キクタンを勉強する」ことを条件と考えるか、キクタンを勉強した人と考えるかによって答えが違ってくる。正しいか正しくないかはどちらも正解であり、生徒の解答も２通りに分かれた。答えよりも理由を重視する問題であり、これをもとに議論してみるのも面白い。

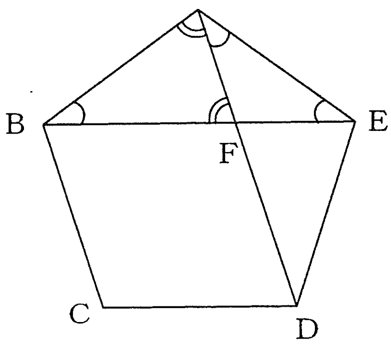
問題3

【解答１】

１辺の長さが1の正五角形$ABCDE$について

対角線の長さをxとする。

対角線BEとADの交点をFとする。



正五角形の内角の和は$180° \times 3 = 540°$より

$\angle BAE = 540° \div 5 = 108°$である。

$\angle ABE = \angle FAE = \angle AFE = 108° \div 3 = 36°$

$\angle BAF = 72°$より$\angle BFA = 72°$である。

したがって、次のことが成り立つ。

・$\triangle BAF$は$BA = BF$の二等辺三角形である。 ……①

・$\triangle ABE \backsim \triangle FEA$ ……②

①より$AB = BF = 1$であり、$BE = x$であるから

$EF = x - 1$ ……③

また、②より$AB : BE = EF : EA$が成り立つから$1 : x = EF : 1$より

$EF = \dfrac{1}{x}$ ……④

③④より

$x - 1 = \dfrac{1}{x}$ ……☆

がなりたつから両辺をx倍して解の公式を用いて計算すると$x > 0$より

$$BE = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

【解答２】

$\angle BAE=\alpha=108^\circ$とする。

$3\alpha+2\alpha=540^\circ$より$3\alpha=540^\circ-2\alpha$であるから

$\cos3\alpha=\cos(540^\circ-2\alpha)=-\cos2\alpha$

ここで三倍角の公式、二倍角の公式より$\cos\alpha=c$とおくと

$4c^3-3c=-(2c^2-1)$

$(c+1)(4c^2-2c-1)=0$

$-1<c<0$より

$c=\cos108^\circ=\dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$

余弦定理より

$BE^2=1+1-2\times1\times1\times\cos108^\circ$

$\therefore BE=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

【コメント】

正五角形の対角線の長さが黄金比になるのは有名な事実であるが、中学校の知識でいざ求めようとすると相似が必要で気づきにくい。数学Ⅰの三角比、数学Ⅱの三角関数の知識を使うと、計算で求められるだけに高校数学のありがたみが感じられる。

問題４

点Pの座標を(x,y)とし、$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$とする。
ただし、rとθの範囲は$1\leqq r\leqq2$、$\dfrac{1}{2}\leqq\tan\theta\leqq3$ $(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2})$ とする。点Pの存在する領域内の(x,y)における$x+y$の最大値と最小値を求めよ。

【解答１】

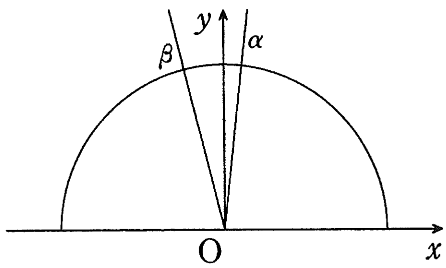
$x+y=r\cos\theta+r\sin\theta=\sqrt{2}\,r\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$のとき$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$、$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$より

$\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{5}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

$\tan\beta=3$のとき$\cos\beta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$、$\sin\beta=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$より

$\sin\left(\beta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{3}{\sqrt{10}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{10}}\times\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$



よって$r=2$、$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$のとき最大値$2\sqrt{2}$

$r=1$、$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$のとき最小値$\dfrac{2}{\sqrt{5}}$であるから

$r=2$、$\theta=\dfrac{\pi}{4}$、$x=\sqrt{2}$、$y=\sqrt{2}$のとき最大値$2\sqrt{2}$

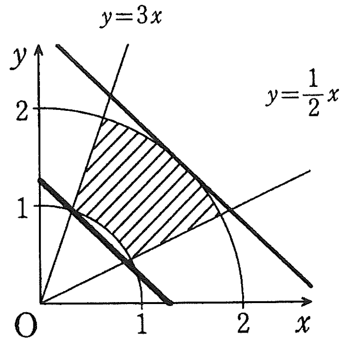
$r=1$、$\tan\theta=3$、$x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$、$y=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$のとき最小値$\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

【解答２】

$x^2+y^2=r^2$ より $1\leqq x^2+y^2\leqq 4$

$\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ より $y=\tan\theta\, x$ だから $\dfrac{1}{2}x\leqq y\leqq 3x$

ここから点Pを図示すると右の図のようになる。



$x+y=k$ とおくと $y=-x+k$ の直線を考えて

$x^2+y^2=1$ と $y=3x$ の交点が連立して $\left(\dfrac{1}{\sqrt{10}},\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)$ だから

$x=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$、$y=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$ のとき最小値 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$

$x^2+y^2=4$ と $y=-x+k$ が接する時が k の最大になるから

$\dfrac{|-k|}{\sqrt{2}}=2$ より $k=2\sqrt{2}$

したがって $x=\sqrt{2}$、$y=\sqrt{2}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$

【コメント】

r、θ に注目するか、x、y に注目するかで解法が変わってくる。r、θ に注目すれば三角関数の問題になるし、x、y に注目すれば線形計画の問題になる。図形と方程式と三角関数という一見すると別の分野に見える単元を結びつける極座標表示って面白い！

ちなみに、高校２年生では極座標表示は詳しく習っていないので、誘導をして次のような問題にした。

点Pの座標を (x,y) とし、$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ とする。

ただし、r と θ の範囲は $1\leqq r\leqq 2$、$\dfrac{1}{2}\leqq\tan\theta\leqq 3$ $\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

（１）$r=1$、$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときのPの座標を求めよ。

（２）$r=2$ で、Pの座標が $(\sqrt{3},1)$ となるときの θ の値を求めよ。

（３）x^2+y^2 の取りうる値の範囲を求めよ。

（４）$\dfrac{y}{x}$ の取りうる値の範囲を求めよ。

（５）点Pの存在する領域を $x-y$ 平面上に図示せよ。

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$、$\tan\beta=3$ $\left(0\leqq\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}、0\leqq\beta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。

（６）$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\sin\beta$、$\cos\beta$ を小さい順に並べよ。

（７）$\tan(\beta-\alpha)$ を計算して、$\beta-\alpha$ の角の大きさを求めよ。

（８）（５）で求めた領域の面積を求めよ。

（９）点Pの存在する領域内の (x,y) における $x+y$ の最大値と最小値を次の２通りの方法で求めよ

（ａ）（５）の領域を利用して線形計画法で求める。

（ｂ）$x+y=r\cos\theta+r\sin\theta$ を合成して最大値、最小値を求める。