正五角形のあれこれ

札幌創成高校　数学科　教諭

外山尚生

[キーワード]平面図形・三角比・三角関数

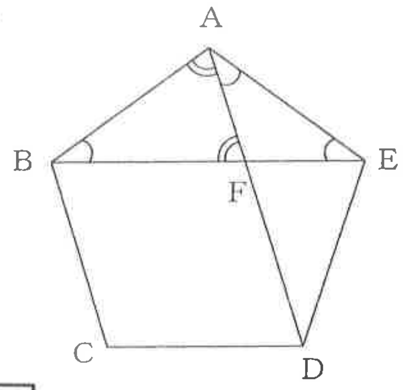
§０　はじめに

正三角形や正方形、正六角形に比べて、正五角形はあまり登場回数がない。しかし正五角形にはいろいろな宝物が含まれている。宝物探しをしながら正五角形を研究しよう。

§１　対角線の長さ

まず、対角線の長さを求めよう。ここでは２つのアプローチから求めてみたい。

１．１　三角形の相似を用いたアプローチ（中学生向け）



１辺の長さが1の正五角形$ABCDE$について

対角線の長さをxとする。

対角線BEとADの交点をFとする。

正五角形の内角の和は$180° \times 3 = 540°$より

$\angle BAE = 540° \div 5 = 108°$である。

$\angle ABE = \angle FAE = \angle AFE = 108° \div 3 = 36°$

$\angle BAF = 72°$より$\angle BFA = 72°$である。

したがって、次のことが成り立つ。

・$\triangle BAF$は$BA = BF$の二等辺三角形である。	……①
・$\triangle ABE \backsim \triangle FEA$	……②

①より$AB = BF = 1$であり、$BE = x$であるから

$EF = x - 1$　……③

また、②より$AB : BE = EF : EA$が成り立つから$1 : x = EF : 1$より

$EF = \dfrac{1}{x}$　……④

③④より

$x - 1 = \dfrac{1}{x}$　……☆

がなりたつから両辺をx倍して解の公式を用いて計算すると$x > 0$より

$$BE = x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

１．２　余弦定理を用いたアプローチ（高校２年以上向け）

$\angle BAE = \alpha = 108°$とする。

$3\alpha + 2\alpha = 540°$より$3\alpha = 540° - 2\alpha$であるから

$\cos 3\alpha = \cos(540° - 2\alpha) = -\cos 2\alpha$

ここで三倍角の公式、二倍角の公式より$\cos\alpha = c$とおくと

$4c^3 - 3c = -(2c^2 - 1)$

$(c+1)(4c^2 - 2c - 1) = 0$

$-1<c<0$ より

$$c=\cos 108° = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

余弦定理より

$$BE^2 = 1+1-2\times 1\times 1\times \cos 108°$$

$$\therefore BE=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}=\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

したがって、**正五角形の対角線の長さは**$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$**である。**

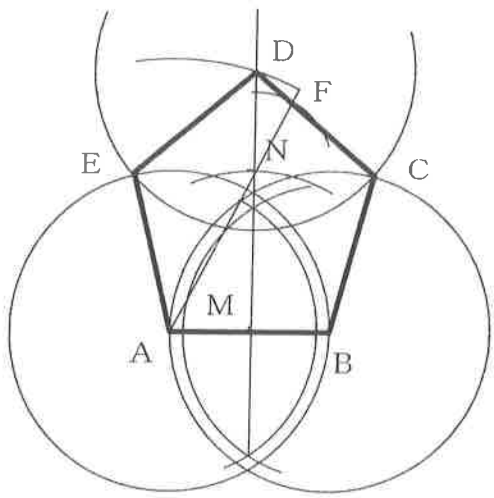
正五角形の対角線の長さは黄金比であることは有名な事実であるが、やはり美しい。

§2　正五角形の作図

1辺が1の正五角形の対角線の長さが$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$になることを利用して、正五角形を作図しよう。

正五角形の作図は次のようにしてできる。

Ⅰ与えられた線分ABの垂直二等分線lをひき、ABの中点をMとする。
Ⅱ$AB=MN$となる点NをAB上にとる。
ⅢAN上に$AM=NF$となり、かつ、$AF>AN$となる点Fをとる。
Ⅳ中心A、半径AFの円と直線lの交点Dをとる。
Ⅴ中心D、半径MNの円と中心A、B、半径MNの交点をそれぞれC、Eとする。
Ⅵ$ABCDE$は正五角形である。



証明

Ⅰ $AB=1$とする。lはABの垂直二等分線より

$$AM=\frac{1}{2}、AB\perp l$$

Ⅱ $NM=AB=1$より三平方の定理から$AN=\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$だから

Ⅲ $AF=AN+NF$で、$NF=AM=\frac{1}{2}$より

$$AF=\frac{\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Ⅳよって、$AD=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$だから、ADは正五角形$ABCDE$の対角線になる。

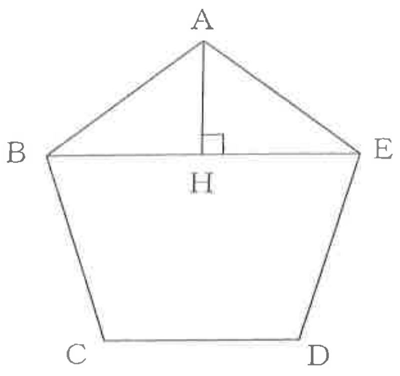
Ⅴ $DC=BC=MN=1=AB$よりCは正五角形$ABCDE$の頂点である。

$DE=EA=MN=1=AB$よりEは正五角形$ABCDE$の頂点である。

Ⅵよって、五角形$ABCDE$は正五角形である。終

§３　五角形の面積

３．１　$\triangle ABE$の面積



まず$\triangle ABE$の面積を求めてみよう。

AからBEに下した垂線の足をHとする。

$\triangle ABE$は二等辺三角形であるから、

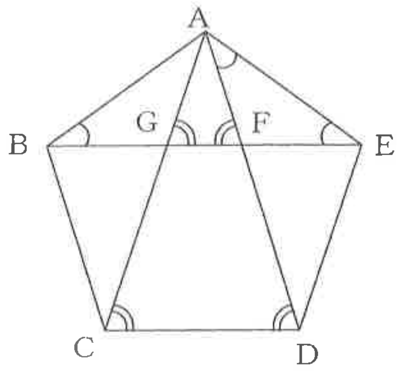
$$BH=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

三平方の定理より$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2+AH^2=1$

$$AH=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$$

よって$\triangle ABE=\frac{1}{2}\times\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}$

３．２　正五角形の面積



いよいよ正五角形の面積を求めてみよう。

対角線BEとAC、ADの交点をそれぞれG、Fとする。

また、対角線の長さをxとする。

$\triangle ABE\backsim\triangle FEA$より$\triangle ABE:\triangle FEA=x^2:1$　…⑤

また、$GF:EF=1-EF:EF$で、１．１節（Ｐ１）の④より

$$GF:EF=1-\frac{1}{x}:\frac{1}{x}=x-1:1$$

したがって$\triangle FEA:\triangle AGF=1:x-1$　…⑥

また、$\triangle AGF\backsim\triangle ACD$で、$AG:AC=\frac{1}{x}:x=1:x^2$より

$\triangle AGF:\triangle ACD=1:x^4$　…⑦

⑤⑥⑦より$\triangle ABE:\triangle ACD=x^2:x^4(x-1)=1:x^2(x-1)$

ここで１．１（Ｐ１）の☆より$x-1=\frac{1}{x}$であるから

$$\triangle ABE:\triangle ACD=1:x^2\times\frac{1}{x}=1:x=1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

よって、五角形$ABCDE$は$\triangle ABE$の$x+2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}+2=\frac{5+\sqrt{5}}{2}$倍である。

したがって五角形$ABCDE$の面積は

$S=\frac{5+\sqrt{5}}{2}\times\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{4}$である。

§４　まとめ

正五角形は正三角形や正方形、正六角形に比べて単純にはいかないだけに、中学校から高校まで長きにわたって楽しめる教材である。そしてその道すがらには美しい数学の世界が広がっている。

このレポートをきっかけに正五角形のもつ美しさに気が付いてほしい。

■参考文献■

・矢崎成俊　「実験数学読本　真剣に遊ぶ数理実験から大学数学へ」　日本評論社　２０１６年