第６５回北海道算数数学教育研究大会　高等学校部会　第３分科会

平成２２年１０月１５日

数学Ⅲの授業実践報告

北海道稚内高等学校　今川　直行

§０．はじめに

昨年度に数学Ⅲを担当しました。その中で実践してきたことを報告します。内容は次の３つです。

①分数関数を含む方程式・不等式について

教科書には主にグラフを用いた解法が記載されています。このことを踏まえての別解の実践やそのときの生徒の反応等について述べます。

②三角関数の導関数について

導入場面で、グラフを用いた方法や導関数の定義を用いた実践について述べます。

③高次導関数の応用について

この単元に関連する生徒からの質問がきっかけで、整級数展開やテイラー展開，マクローリン展開について、大学で扱う内容ですが、厳密な条件等を除いた実践を述べます。また、既習問題で展開式を活用すると比較的簡単に解くことができる例題について述べます。

§１．分数関数を含む方程式・不等式

教科書の例題にある問題です。

> (1)　直角双曲線　$y=\dfrac{2}{x-1}$　と直線　$y=x$　の共有点の座標を求めよ。

解）$\dfrac{2}{x-1}=x$　とおく

両辺に　$x-1$　を掛けると

$$2=x(x-1)$$

整理して　$x^2-x-2=0$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore\quad x=-1,\ 2$$

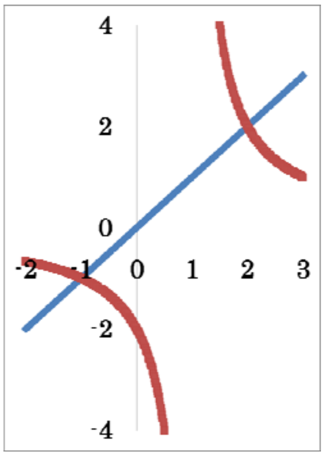
$y=x$　に代入して

$x=-1$　のとき　$y=-1$

$x=2$　のとき　$y=2$

したがって，共有点の座標は

$(-1,-1),\ (2,2)$



教科書にはグラフも載っていました。そして、この(1)は方程式　$\dfrac{2}{x-1}=x$　を解く過程と同じであることを確認し、次の(2)を扱いました。これも教科書の問題です。

> (2)　関数　$y=\dfrac{2}{x-1}$　のグラフを利用して，
>
> 次の不等式　$\dfrac{2}{x-1}>x$　を解け。

解）　求める x の範囲は，関数　$y=\dfrac{2}{x-1}$　のグラフが直線　$y=x$　のグラフより上側にあるときである。

よって，グラフから　$x<-1,\ 1<x<2$

ここで、次のような発問をしました。

「(2)は、グラフを書かなければ解けないのか？方程式(1)のように計算でできないのか？」

そこで、次の誤った解答を示しました。

> ※生徒に時間を与えて、解答させてみることも良い方法であると考えます。

誤） $\dfrac{2}{x-1}>x$ の両辺に $x-1$ を掛けると

$$2>x(x-1)$$

整理して　$x^2-x-2<0$

$$(x+1)(x-2)<0$$

$$\therefore \quad -1<x<2 \quad ？？$$

「グラフを利用した解と異なる結果で、この解答のどこに誤りがあるのか？」
生徒はなかなか気づいてくれませんでした。

さらなる発問
「不等式では両辺に何かを掛けたり割ったりすると、不等号の向きはどうなるのか？」
生徒『負の数の場合、不等号の向きが変わる』

「では、$x-1$ には負の数の場合があるから、場合分けが必要である。しかし、$x-1$ をちょっと細工することで、実は場合分けしないで済む。正の数であれば、不等号の向きが変わらないのだから、何を掛けるとよいのか？」
生徒『両辺に $(x-1)^2$ を掛けるとよい』

以上のようなやりとりを踏まえて、次のような正解を示しました。

正） $\dfrac{2}{x-1}>x$ の両辺に $(x-1)^2$ を掛けて

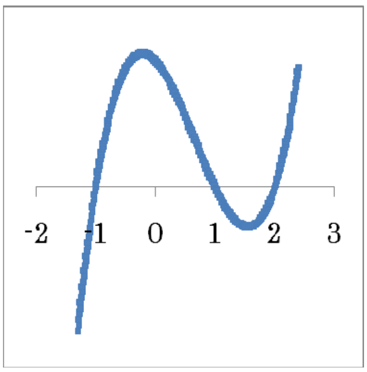
$$2(x-1)>x(x-1)^2 \quad 【\because \quad (x-1)^2>0】$$

$$(x-1)\{x(x-1)-2\}<0$$

$$(x-1)(x^2-x-2)<0$$

$$(x+1)(x-1)(x-2)<0 \quad \cdots※$$

下のグラフより　$x<-1,\ 1<x<2$

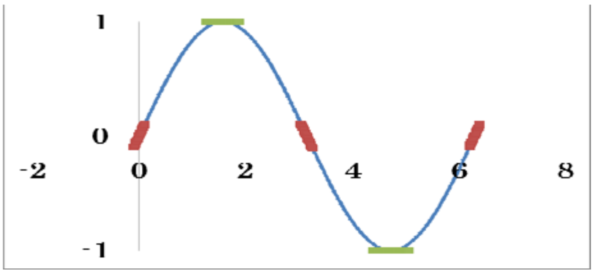


※３次関数のグラフであるが、左辺で x 切片が分かるので、簡単に書ける。

§２．三角関数の導関数

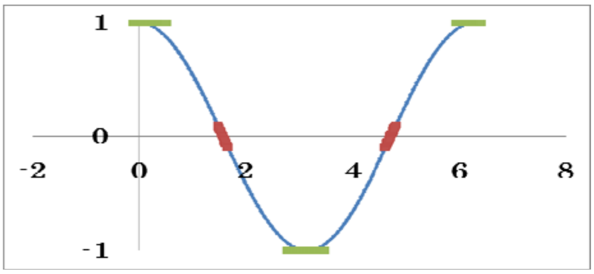
導入場面で $(\sin x)'=\cos x$, $(\cos x)'=-\sin x$ であることを大雑把ですが、次のように実践しました。

$y=\sin x$ のグラフにおいて

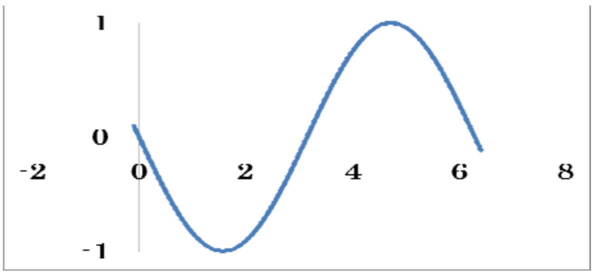


$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ での接線の傾きがそれぞれ正(実は 1), 0, 負(実は－1), 0 であるから、その導関数は $(\sin x)'=\cos x$

また、$y=\cos x$ のグラフにおいて



$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi$ での接線の傾きがそれぞれ 0, 負(－1), 0 , 正(1)であるから、その導関数は $(\cos x)'=-\sin x$



次に、三角関数の導関数を、導関数の定義式を用いて導く場面についてです。教科書では、三角関数の極限に関する公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を用いて導かれていました。

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h - \sin x(1-\cos h)}{h} \quad \cdots ★$$
$$= \lim_{h\to 0}\left(\cos x\cdot\frac{\sin h}{h} - \sin x\cdot\frac{1-\cos h}{h}\right)$$

ここで $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$ であるから

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sin^2 h}{h(1+\cos h)}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}\cdot\frac{\sin h}{1+\cos h}$$
$$= 1\cdot\frac{0}{2} = 0$$

よって　$(\sin x)' = (\cos x)\cdot 1 - (\sin x)\cdot 0 = \cos x$

この内容について生徒から質問等を促したところ、概ね次のとおりでした。
『★のように式変形できることに結果的には理解できるが、自力で導く際、★のように変形することになかなか気がつかない』

納得できない様子でしたので、次の導出方法を紹介しました。

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2} \quad \cdots ※$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$
$$= 1\cdot\cos(x+0) = \cos x$$

三角関数の和→積公式(※)を用いた導出方法です。和→積公式は暗記ではなく、三角関数の加法定理から導くことができるよう話しました。

生徒『三角関数の和→積公式の準備が必要であるが、式変形は簡潔で、理解できる』
何とか納得できたようでした。

§３．高次導関数の応用

　授業で微分法の単元が終盤に入ろうとしたとき、生徒から次の問題について質問されました。傍用問題集にある章末の問題です。

☆　多項式 $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの余りは $f'(a)(x-a)+f(a)$ であることを証明せよ。

生徒『解説を読んでも書かれていることが分からない、イメージができない』
そこで、高次導関数を用いた応用例として「整級数展開」や「テイラー展開」を紹介しました。大学で扱うことですが、厳密な話は抜きにして既習事項で導くことができることと、高校の数学の問題で活用すると比較的簡単に美しく解くことができると考え、活用例とともに次のとおり実践しました。

次のような関数(**多項式**)Ⓐがあるとする。

$$f(x) = k_0 + k_1(x-a) + k_2(x-a)^2 + k_3(x-a)^3 + \cdots + k_n(x-a)^n \quad \cdots Ⓐ$$

このとき　$f(a)=k_0$　…⓪

Ⓐ式を微分した式

$$f'(x) = k_1 + 2k_2(x-a) + 3k_3(x-a)^2 + \cdots + nk_n(x-a)^{n-1}$$

よって　$f'(a)=k_1$　…①

さらに微分した式

$$f''(x) = 2k_2 + 6k_3(x-a) + \cdots + n(n-1)k_n(x-a)^{n-2}$$

$f''(a)=2k_2$　であるから

$$k_2 = \frac{f''(a)}{2} \quad \cdots ②$$

$$f'''(x) = 6k_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)k_n(x-a)^{n-3}$$

$f'''(a)=6k_3$　であるから

$$k_3 = \frac{f'''(a)}{6} \quad \cdots ③$$

微分をさらに続けて、Ⓐ式をn 回微分した式

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1\cdot k_n$$

$$f^{(n)}(a)=k_n\cdot n!$$ 　であるから

$$k_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\quad\cdots ⓝ$$

⓪，①，②，③，……，ⓝをⒶに代入した式が次のⒷ式である。

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad\cdots Ⓑ$$

このことを踏まえて、今度は無限回微分できる関数(**多項式ではない**) $\boxed{\text{A}}$ について考える。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}k_n(x-a)^n\quad\cdots\boxed{\text{A}}$$

前述の⓪，①，②，③，……，ⓝ，…… 　の計算を無限に続けると、次の $\boxed{\text{B}}$ 式となる。

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots\quad\cdots\boxed{\text{B}}$$

この $\boxed{\text{B}}$ 式を、**テイラー展開**または**テイラー級数**といい、$\boxed{\text{C}}$ 式のように簡潔に書ける。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad\cdots\boxed{\text{C}}$$

$\boxed{\text{C}}$ 式において、とくに $a=0$ のときのものを、**マクローリン展開**といい、$\boxed{\text{D}}$ 式のように書ける。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots\quad\cdots\boxed{\text{D}}$$

活用例 1～割り算の問題(1)

$f(x)=2x^2-x+3$ 　のとき

$f'(x)=4x-1$，$f''(x)=4$ 　であるから

$f(1)=4$，$f'(1)=3$，$f''(1)=4$

これらをⒷ式に代入する

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2=4+3(x-1)+2(x-1)^2$$

したがって、$f(x)=2x^2-x+3$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは $4+3(x-1)=3x+1$

活用例 2～割り算の問題(2)

$f(x)=k(x-a)^n$（k は定数，$f(x)$ は $(x-a)^n$ で割り切れる）のとき、Ⓑ式より次のことと同値である。

$f(a)=0$ 　かつ　$f'(a)=0$ 　かつ　$f''(a)=0$ かつ … かつ $f^{(n-1)}(a)=0$

このことを踏まえて、例えば

$f(x)=x^3-x^2+ax+b$ 　が　$(x-1)^2$ 　で割り切れるとき $f(1)=0$ 　かつ　$f'(1)=0$ 　が成り立つ。

$$\therefore\ \begin{cases}f(1)=1-1+a+b=0\\ f'(1)=3-2+a=0\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}a=-1\\ b=1\end{cases}$$

活用例 3～近似値について

$f(x)=e^x\ \Rightarrow\ f^{(n)}(x)=e^x\ \Rightarrow\ f^{(n)}(0)=1$

$f^{(n)}(0)=1$ を $\boxed{\text{D}}$ 式に代入する

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots\cdots$$

この式に $x=1$ を代入すると、自然対数の底 e の値が近似できる。

$$e=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\cdots\cdots\approx2.718$$

ちなみに $\dfrac{1}{24}$ までの和は 約 2.708 である。

生徒の反応はまずまずのものでした。先ほどの質問された問題にも対応しています。

〈参考文献〉

1)　改訂版　数学Ⅲ　数研出版
2)　改訂版　教科書傍用「クリアー数学Ⅲ」　数研出版
3)　今川直行　第 73 回数実研発表レポート