北数教“第７３回数学教育実践研究会”

平成２２年６月１２日

高次導関数の応用について～テイラー展開の紹介～

北海道稚内高等学校　今川　直行

数学Ⅲの授業において「高次導関数」を扱った際、応用例として「整級数展開」や「テイラー展開」を紹介した。大学で扱うことではあるが、(厳密な話は抜きにして)既習事項で導くことができることと、高校の数学の問題で活用すると比較的簡単に(美しく)解くことができると考え、活用例とともに次のとおり実践した。

$$f(x)=k_0+k_1(x-a)+k_2(x-a)^2+k_3(x-a)^3+\cdots+k_n(x-a)^n \quad \cdots Ⓐ$$

と表せる関数(多項式)があるとする。このとき　$f(a)=k_0$　…⓪

Ⓐ式を微分する

$$f'(x)=k_1+2k_2(x-a)+3k_3(x-a)^2+\cdots+nk_n(x-a)^{n-1}$$ であるから　$f'(a)=k_1$　…①

さらに微分する

$$f''(x)=2k_2+6k_3(x-a)+\cdots+n(n-1)k_n(x-a)^{n-2}$$

$f''(a)=2k_2$　であるから　$k_2=\dfrac{f''(a)}{2}$　…②

$$f'''(x)=6k_3+\cdots+n(n-1)(n-2)k_n(x-a)^{n-3}$$

$f'''(a)=6k_3$　であるから　$k_3=\dfrac{f'''(a)}{6}$　…③

……

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots3\cdot2\cdot1\cdot k_n$$

$f^{(n)}(a)=k_n\cdot n!$　であるから　$k_n=\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$　…ⓝ

⓪，①，②，③，……，ⓝをⒶに代入して

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \cdots Ⓑ$$

以上のことを踏まえて、今度は無限回微分できる関数(多項式ではない)$\boxed{A}$について考える。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}k_n(x-a)^n \quad \cdots \boxed{A}$$

前述の⓪，①，②，③，……，ⓝ，……　の計算を無限に続けたもの

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots \quad \cdots \boxed{B}$$

この$\boxed{B}$式を、テイラー展開(Taylor expansion) またはテイラー級数(Taylor series) と呼ばれ、

$\boxed{C}$式で表すことができる。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \cdots\boxed{C}$$

$\boxed{C}$式において、とくに $a=0$ のときのものを、マクローリン展開(Maclaurin's expansion)と

呼ばれ、$\boxed{D}$式で表すことができる。

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\frac{f'''(0)}{6}x^3+\cdots\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots \quad \cdots\boxed{D}$$

活用例 1～割り算の問題(1)

$f(x)=2x^2-x+3$ のとき　$f'(x)=4x-1$，$f''(x)=4$ であるから

$f(1)=4$，$f'(1)=3$，$f''(1)=4$

Ⓑ式に代入すると　$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\dfrac{f''(1)}{2}(x-1)^2=4+3(x-1)+2(x-1)^2$

このことから、$f(x)=2x^2-x+3$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは $4+3(x-1)=3x+1$

☆生徒から質問された問題

多項式 $f(x)$ を $(x-a)^2$ で割ったときの余りは $f'(a)(x-a)+f(a)$ であることを示せ。

⇒解説を読んでも書かれていることが分からない(イメージができない)

私が「整級数展開」や「テイラー展開(級数)」を紹介するきっかけの一つである。

活用例 2～割り算の問題(2)

$f(x)=k(x-a)^n$ (※ $f(x)$ は $(x-a)^n$ で割り切れる) と表されるとき、Ⓑ式より

$f(a)=f'(a)=f''(a)=f'''(a)=\cdots=f^{(n-1)}(a)=0$ が成り立つ。

よって、$f(x)=x^3-x^2+ax+b$ が $(x-1)^2$ で割り切れるとき

$f(1)=0$ かつ $f'(1)=0$ が成り立つ。　$\therefore \begin{cases} f(1)=1-1+a+b=0 \\ f'(1)=3-2+a=0 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases}$

活用例 3～近似値について

$f(x)=e^x$ のとき　$f^{(n)}(x)=e^x$ より　$f^{(n)}(0)=1$

$\boxed{D}$式に代入して　$f(x)=1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots\cdots$

この式に $x=1$ を代入すると

$e=1+1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{24}+\cdots\cdots\approx 2.718$ と近似できる。　※ちなみに $\dfrac{1}{24}$ までの和は 約 2.708

☆教科書では「粗い近似値」の紹介にとどまっているが、「マクローリン展開」を(可能な限り)活用することで、より真の値に近いものを求めることができる。