令和２年(2020 年)６月６日

漸化式のまとめ

北海道大麻高等学校　今川　直行

$\boxed{1.\ a_{n+1}=a_n+d}$

初項a_1公差dの等差数列　$a_n=a_1+(n-1)d$

$\boxed{2.\ a_{n+1}=ra_n}$

初項a_1公比rの等比数列　$a_n=a_1r^{n-1}$

$\boxed{3.\ 階差数列b_n=a_{n+1}-a_n\ :\ a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k}$

$k=1$; $a_2-a_1=b_1$
$k=2$; $a_3-a_2=b_2$
$k=3$; $a_4-a_3=b_3$
…………………
$k=n-1$; $a_n-a_{n-1}=b_{n-1}$
辺々加えて　$a_n-a_1=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$

$\boxed{4.\ 和S_nと一般項a_n\ :\ S_n-S_{n-1}=a_n\ (n\geqq 2)}$

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$
$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$　　$(n\geqq 2)$
辺々引いて　$S_n-S_{n-1}=a_n\ (n\geqq 2)$，$a_1=S_1$

◎2 項間漸化式

$\boxed{5.\ a_{n+1}=a_n+f(n)}$

階差数列$b_n=a_{n+1}-a_n=f(n)$となり

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\quad (n\geqq 2)$$

例　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n-1$
答　$a_n=n^2-2n+2$

$\boxed{6.\ a_{n+1}=pa_n+f(n)\ \ (p\neq 0)}$

$p=1$のとき$\boxed{5}$と同値

与式の両辺をp^{n+1}で割って　$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{f(n)}{p^{n+1}}$

$b_n=\frac{a_n}{p^n}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+F(n)$

よって$\boxed{5}$の型になる

例　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^n$
答　$a_n=3^n-2^n$
※　例題解答編に補題を載せた

$\boxed{7.\ a_{n+1}=f(n)a_n}$

$a_2=f(1)a_1$　$a_3=f(2)a_2$ … $a_n=f(n-1)a_{n-1}$
辺々かけて
$a_2a_3\ldots a_n=f(1)f(2)\ldots f(n-1)a_1a_2\ldots a_{n-1}$
∴　$a_n=f(1)f(2)f(3)\ldots f(n-1)a_1$
例　$a_1=1$，$a_{n+1}=2^na_n$
答　$a_n=2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$　　【$a_n=2^{1+2+3+(n-1)}\cdot a_1$】

$\boxed{8.\ a_{n+1}=pa_n+q\ \ (p\neq 1,\ q\neq 0)}$

$p=1$のとき$\boxed{1}$と同値　$q=0$のとき$\boxed{2}$と同値
$x=px+q$の解αに対して $b_n=a_n-\alpha$とおくと
$b_{n+1}=pb_n$　初項$b_1=a_1-\alpha$ 公比 p の等比数列
$b_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}$　∴　$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha$
例　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+3$
答　$a_n=5\cdot 2^{n-1}+3$

$\boxed{9.\ a_{n+1}=qa_n{}^p\ \ (p>0,\ q>0)}$

対数をとって　$\log_c a_{n+1}=\log_c q+p\log_c a_n$
$b_n=\log_c a_n$とおくと　$b_{n+1}=pb_n+\log_c q$
よって$\boxed{8}$の型になる

例 $a_1=2, a_{n+1}=2\sqrt{a_n{}^3}$　答 $a_n=2^{3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2}$

$\boxed{10.\ a_{n+1}=\frac{ra_n}{p+qa_n}\quad (a_n\neq 0)}$

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{p+qa_n}{ra_n}=\frac{p}{r}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{q}{r}$$

$b_n=\frac{1}{a_n}$　とおくと　$b_{n+1}=\frac{p}{r}b_n+\frac{q}{p}$

よって$\boxed{8}$の型になる

例　$a_1=\frac{1}{4}$，$a_{n+1}=\frac{a_n}{4a_n+5}$　　答　$a_n=\frac{1}{5^n-1}$

$\boxed{11.\ a_{n+1}=\frac{ra_n+s}{pa_n+q}}$

a_n，a_{n+1}をxとおいて得られる方程式

$x=\frac{rx+s}{px+q}$ 即ち $px^2+(q-r)x-s=0$　…①

の解をα，βとすると

$$a_{n+1}-\alpha=\frac{ra_n+s}{pa_n+q}-\alpha=\frac{(r-p\alpha)a_n+s-q\alpha}{pa_n+q}$$

また①より　$s-q\alpha=-\alpha(r-p\alpha)$

よって　$a_{n+1}-\alpha=\frac{(r-p\alpha)(a_n-\alpha)}{pa_n+q}$　…②

同様に　$a_{n+1}-\beta=\frac{(r-p\beta)(a_n-\beta)}{pa_n+q}$　…③

②÷③より　$\frac{a_{n+1}-\alpha}{a_{n+1}-\beta}=\frac{r-p\alpha}{r-p\beta}\cdot\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$

ここで $b_n=\frac{a_n-\alpha}{a_n-\beta}$ とおくと　$b_{n+1}=\frac{r-p\alpha}{r-p\beta}b_n$

よってb_nは等比数列になりa_nが求められる

例 1　$a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{3a_n+2}{a_n+2}$

答　$a_n=\frac{2^{2n-2}-1}{2^{2n-3}+1}$

例 2　$a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{4a_n-1}{a_n+2}$　　答　$a_n=\frac{n+5}{n+2}$

◎３項間漸化式

$\boxed{12.\ a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \ \ (p+q=1)}$

両辺からa_{n+1}を引いて

$a_{n+2} - a_{n+1} = (p-1)a_{n+1} + qa_n$

$p-1 = -q$ であるから

$a_{n+2} - a_{n+1} = -q(a_{n+1} - a_n)$

よって階差数列$b_n = a_{n+1} - a_n$は$b_{n+1} = -qb_n$

となり 初項$b_1 = a_2 - a_1$ 公比$-q$ の等比数列

ゆえに $n \geqq 2$ のとき $a_n = a_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} b_1(-q)^k$

例 $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_{n+2} = 4a_{n+1} - 3a_n$

答 $a_n = \dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

$\boxed{13.\ a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n \ \ (p+q \neq 1)}$

a_{n+2}をx^2 a_{n+1}をx a_nを 1 とおいた方程式

$x^2 - px - q = 0$ ・・・(＊) の解をα，β とする

(a) $\alpha \neq \beta$のとき $\alpha + \beta = p$ $\alpha\beta = -q$ より

与式は $a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$

変形して $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$

よって数列$\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$は 初項$a_2 - \alpha a_1$ 公比β

の等比数列

∴ $a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1}$ ・・・①

同様にして $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$

∴ $a_{n+1} - \beta a_n = (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}$ ・・・②

①－②より

$a_n = \dfrac{(a_2 - \alpha a_1)\beta^{n-1} - (a_2 - \beta a_1)\alpha^{n-1}}{\beta - \alpha}$

※ $p+q=1$のとき

方程式(＊)の１つの解$\alpha = 1$になる

よって①と②は

$a_{n+1} - a_n = (a_2 - a_1)\beta^{n-1}$ ・・・①

$a_{n+1} - \beta a_n = a_2 - \beta a_1$・・・②

となり 同様に解くことができる

(b) $\alpha = \beta$のとき

①は $a_{n+1} - \alpha a_n = (a_2 - \alpha a_1)\alpha^{n-1}$

すなわち $a_{n+1} = \alpha a_n + (a_2 - \alpha a_1)\alpha^{n-1}$ となり

$\boxed{6}$の方法で求める

例１ $a_1 = 1$，$a_2 = 4$，$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$

答 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1}$

例２ $a_1 = 1$，$S_n = 4a_{n-1} + 2$ $(n = 2, 3, \cdots)$

答 $a_n = (3n-1) \cdot 2^{n-2}$

例３ $a_1 = 1$，$a_2 = 2$，$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n$

答 $a_n = \dfrac{1}{6}n(n^2 - 3n + 8)$

例４ $a_1 = 3$，$a_2 = 1$，

$3(n+1)a_{n+2} - (4n+1)a_{n+1} + na_n = 0$

答 $a_n = \dfrac{1}{3^{n-2}}$

【$3a_{n+2} - a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}(3a_{n+1} - a_n)$

$b_n = 3a_{n+1} - a_n \Longrightarrow b_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}b_n$

$\boxed{7}$の型になる】

添字が$a_n = pa_{n-1} + qa_{n-2}$ $(n = 3, 4, \cdots)$・・・①
などと与えられたときは
$a_{n+2} = pa_{n+1} + qa_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ・・・②
として解答を進めたほうが良い(①と②は同値)
そのほうが階差数列 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおくとき
など間違わない

◎連立漸化式

$$\boxed{14.\ \begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n & \cdots① \\ b_{n+1} = ra_n + sb_n & \cdots② \end{cases}}$$

①より $b_n = \dfrac{1}{q}(a_{n+1} - pa_n)$

よって $b_{n+1} = \dfrac{1}{q}(a_{n+2} - pa_{n+1})$

これらを②に代入して整理すると

$a_{n+2} = (p+s)a_{n+1} + (qr - ps)a_n$

よって$\boxed{13}$の型になる

例 $a_1 = 1$，$b_1 = 1$，$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n & \cdots① \\ b_{n+1} = 3a_n + 4b_n & \cdots② \end{cases}$

答 $a_n = \dfrac{1}{2}(5^{n-1} + 1)$ $b_n = \dfrac{1}{2}(3 \cdot 5^{n-1} - 1)$

☆型にない漸化式

$\boxed{a_{n+1} = F(a_n) \quad \text{一般項類推} \rightarrow \text{数学的帰納法}}$

漸化式より$a_1, a_2, a_3, \ldots$を求めて 一般項a_nを

$a_n = f(n)$と類推し数学的帰納法で証明する

$n = k$ のとき $a_k = f(k)$と仮定し

$n = k+1$ のとき 漸化式$a_{n+1} = F(a_n)$より

$a_{k+1} = F(a_k) = F\bigl(f(k)\bigr) = \cdots = f(k+1)$ を示す

例 $a_1 = p + 1$，$a_n = p + 1 - \dfrac{p}{a_{n-1}}$

ただし $p > 1$， $n = 2, 3, \cdots$

解 $a_2 = p + 1 - \dfrac{p}{p+1} = \dfrac{p^2 + p + 1}{p+1}$

$a_3 = p + 1 - \dfrac{p(p+1)}{p^2 + p + 1} = \dfrac{p^3 + p^2 + p + 1}{p^2 + p + 1}$

$p \neq 1$ であるから $a_n = \dfrac{p^n + p^{n-1} + \cdots + 1}{p^{n-1} + \cdots + 1}$

分母分子それぞれ公比pの等比数列の和より

$a_n = \dfrac{p^{n+1} - 1}{p^n - 1}$ ・・・①

①が正しいことを数学的帰納法で証明する

[1] $n = 1$ のとき

$a_1 = \dfrac{p^2 - 1}{p - 1} = p + 1$ となるから成り立つ

[2] $n = k$ のとき①が成り立つ

すなわち $a_k = \dfrac{p^{k+1} - 1}{p^k - 1}$ と仮定する

$$a_{k+1} = p + 1 - \frac{p}{a_k} = p + 1 - \frac{p(p^k - 1)}{p^{k+1} - 1}$$
$$= \frac{(p+1)(p^{k+1} - 1) - p(p^k - 1)}{p^{k+1} - 1}$$
$$= \frac{p^{k+2} - 1}{p^{k+1} - 1}$$

ゆえに①は$n = k+1$のときも成り立つ

[1] [2]より①は任意の自然数nで成り立つ

令和２年(2020 年)６月６日

漸化式のまとめ（例題解答編）

北海道大麻高等学校　今川　直行

$\boxed{5.\ \ a_{n+1}=a_n+f(n)}$

例　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+2n-1$

解　$a_{n+1}-a_n=2n-1$ $b_n=a_{n+1}-a_n$とおくと

数列$\{a_n\}$の階差数列の一般項$b_n=2n-1$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2k-1)$$
$$=1+2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$
$$=n^2-2n+2$$

$n=1$ のとき$1^2-2+2=1=a_1$で成り立つ

答　$a_n=n^2-2n+2$

$\boxed{6.\ \ a_{n+1}=pa_n+f(n)\ \ (p\neq 0)}$

例　$a_1=1$，$a_{n+1}=3a_n+2^n$

解　与式の両辺を3^{n+1}で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{a_n}{3^n}+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと　$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

数列$\{b_n\}$の階差数列の一般項が$\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

であるから　$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k$$
$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{2}{3}}=1-\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$n=1$ のとき $1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}=b_1$ で成り立つ

よって　$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

答　$a_n=3^n-2^n$

補題　$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+2n-3$

解　$\boxed{a_{n+1}+p(n+1)+q=2(a_n+pn+q)}$

とおくと　$a_{n+1}=2a_n+pn+q-p$

与式と比較して　$p=2$，$q=-1$

よって与式は次のようになる

$a_{n+1}+2(n+1)-1=2(a_n+2n-1)$

これは数列$\{a_n+2n-1\}$が 公比 2

初項$a_1+2-1=2$ の等比数列であることを

示している

$a_n+2n-1=2\cdot 2^{n-1}=2^n$

答　$a_n=2^n-2n+1$

※　この補題は$\boxed{6}$の型であるが 2^{n+1}で割ると

$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{2n-3}{2^n}$　となり

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k-3}{2^k}$ の計算が煩雑になる

$\boxed{7.\ \ a_{n+1}=f(n)a_n}$

例　$a_1=1$，$a_{n+1}=2^na_n$

解　$a_2=2^1a_1$

$a_3=2^2a_2$

……

$a_n=2^{n-1}a_{n-1}$

辺々かけて

$a_2a_3\dots a_n=2^12^2\dots 2^{n-1}a_1a_2\dots a_{n-1}$

よって　$a_n=2^{1+2+3+(n-1)}\cdot a_1$

答　$a_n=2^{\frac{1}{2}(n-1)n}$

$\boxed{8.\ \ a_{n+1}=pa_n+q\ \ (p\neq 1,\ q\neq 0)}$

例　$a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n+3$

解　与式を変形して　$a_{n+1}+3=2(a_n+3)$

$b_n=a_n+3$とおくと　$b_{n+1}=2b_n$

$b_1=a_1+3=5$より　$b_n=5\cdot 2^{n-1}$

$a_n+3=5\cdot 2^{n-1}$

答　$a_n=5\cdot 2^{n-1}+3$

$\boxed{9.\ \ a_{n+1}=qa_n{}^p\ \ (p>0,\ q>0)}$

例　$a_1=2, a_{n+1}=2\sqrt{a_n{}^3}$

解　2 を底とする対数をとって

$$\log_2 a_{n+1}=\frac{3}{2}\log_2 a_n+1$$

$b_n=\log_2 a_n$ とおくと

$b_1=1$，$b_{n+1}=\dfrac{3}{2}b_n+1$

$b_{n+1}+2=\dfrac{3}{2}(b_n+2)$より

$b_n+2=3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

よって　$\log_2 a_n=3\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}-2$

答　$a_n=2^{3\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-2}$

$\boxed{10.\ \ a_{n+1}=\dfrac{ra_n}{p+qa_n}\ \ \ (a_n\neq 0)}$

例　$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+5}$

解　$a_1=\dfrac{1}{4}$ と漸化式より $a_n>0$ であるから

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+5}{a_n}=4+\frac{5}{a_n}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと

$b_1=4$，$b_{n+1}=5b_n+4$

$b_{n+1}+1=5(b_n+1)$

$b_n+1=(4+1)\cdot 5^{n-1}=5^n$

$\therefore$　$b_n=5^n-1$

答　$a_n=\dfrac{1}{5^n-1}$

$\boxed{11.\ \ a_{n+1}=\dfrac{ra_n+s}{pa_n+q}}$

例1　$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n+2}{a_n+2}$

解　$x=\dfrac{3x+2}{x+2}$ 即ち $x^2-x-2=0$ の解は

$x=-1$，2 である

これを用いて漸化式を変形すると

$$a_{n+1}+1=\frac{3a_n+2}{a_n+2}+1=\frac{4(a_n+1)}{a_n+2}\quad\cdots①$$

$$a_{n+1}-2=\frac{3a_n+2}{a_n+2}-2=\frac{a_n-2}{a_n+2}\quad\cdots②$$

ここで $a_n=2$ とすると

$$a_{n+1}=\frac{3\cdot2+2}{3+2}=2$$

よって $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=2$ となり

$a_1=0$ に反する　∴ $a_n\neq2$

$a_n\neq2$ であるから　①÷②より

$$\frac{a_{n+1}+1}{a_{n+1}-2}=4\cdot\frac{a_n+1}{a_n-2}$$

$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$ とおくと

$$b_1=-\frac{1}{2},b_{n+1}=4b_n$$

$$b_n=-\frac{1}{2}\cdot4^{n-1}=-2^{2n-3}$$

$b_n=\dfrac{a_n+1}{a_n-2}$ より　$a_n=\dfrac{2b_n+1}{b_n-1}$

答　$a_n=\dfrac{2^{2n-2}-1}{2^{2n-3}+1}$

例2　$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-1}{a_n+2}$

解　$x=\dfrac{4x-1}{x+2}$ 即ち $x^2-2x+1=0$ の解は

$x=1$ である

これを用いて漸化式を変形すると

$$a_{n+1}-1=\frac{4a_n-1}{a_n+2}-1=\frac{3(a_n-1)}{a_n+2}\quad\cdots①$$

ここで $a_n=1$ とすると

$$a_{n+1}=\frac{4\cdot1-1}{1+2}=1$$

よって $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=1$ となり

$a_1=2$ に反する　∴ $a_n\neq1$

$a_n\neq1$ であるから ①の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{a_n+2}{3(a_n-1)}=\frac{1}{a_n-1}+\frac{1}{3}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$ とおくと　$b_{n+1}=b_n+\dfrac{1}{3}$

数列$\{b_n\}$は初項$b_1=1$ 公差$\dfrac{1}{3}$の等差数列より

$$b_n=1+(n-1)\cdot\frac{1}{3}=\frac{3+(n-1)}{3}=\frac{n+2}{3}$$

$b_n=\dfrac{1}{a_n-1}$ より　$a_n=\dfrac{1}{b_n}+1$

答　$a_n=\dfrac{n+5}{n+2}$

$\boxed{12.\ \ a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\ \ (p+q=1)}$

例　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=4a_{n+1}-3a_n$

解　両辺からa_{n+1}を引いて

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$b_1=a_2-a_1=1,\ b_{n+1}=3b_n$$

よって　$b_n=3^{n-1}$

ゆえに　$n\geqq2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

$$=1+\frac{3^{n-1}-1}{3-1}$$

$$=\frac{3^{n-1}+1}{2}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

答　$a_n=\dfrac{3^{n-1}+1}{2}$

$\boxed{13.\ \ a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n\ \ (p+q\neq1)}$

例1　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$

解　$x^2-5x+6=0$ の解は $x=2$，3 である

漸化式を変形すると

$$a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$$

数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$は 初項$a_2-2a_1=2$ 公比 3

の等比数列であるから

$$a_{n+1}-2a_n=2\cdot3^{n-1}\quad\cdots①$$

同様にして

$$a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$$

数列$\{a_{n+1}-3a_n\}$は 初項$a_2-3a_1=1$ 公比 2

の等比数列であるから

$$a_{n+1}-3a_n=2^{n-1}\quad\cdots②$$

①－②より

答　$a_n=2\cdot3^{n-1}-2^{n-1}$

例2　$a_1=1$，$S_n=4a_{n-1}+2$ $(n=2,3,\cdots)$

解　$n\geqq3$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=4a_{n-1}-4a_{n-2}$$

$$a_n=4a_{n-1}-4a_{n-2}\quad(n=3,4,\cdots)$$

よって　$a_{n+2}=4a_{n+1}-4a_n$　$(n=1,2,\cdots)$

変形して　$a_{n+2}-2a_{n+1}=2(a_{n+1}-2a_n)$

ここで $S_2=a_1+a_2=4a_1+2$ より　$a_2=5$

数列$\{a_{n+1}-2a_n\}$は 初項$a_2-2a_1=3$ 公比 2

の等比数列より　$a_{n+1}-2a_n=3\cdot2^{n-1}$

両辺を2^{n+1}で割ると　$\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\dfrac{a_n}{2^n}+\dfrac{3}{4}$

数列$\left\{\dfrac{a_n}{2^n}\right\}$は 初項$\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{1}{2}$ 公差$\dfrac{3}{4}$ の等差数列

であるから　$\dfrac{a_n}{2^n}=\dfrac{1}{2}+(n-1)\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{4}n-\dfrac{1}{4}$

これは $n=1$ についても成り立つ

答　$a_n=(3n-1)\cdot2^{n-2}$

例 3　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=n$

解　変形して　$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=n$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと

$b_1=2-1=1$，$b_{n+1}-b_n=n$

ゆえに　$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{n^2-n}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$$

$b_1=\dfrac{1^2-1+2}{2}=1$ より　$n=1$ でも成立

よって　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(k^2-k+2)$$
$$=\frac{1}{12}(n-1)n(2n-1)-\frac{1}{4}n(n-1)+n$$
$$=\frac{n}{12}\{(n-1)(2n-1)-3(n-1)+12\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n^2-3n+8)$$

$a_1=\dfrac{1}{6}(1-3+8)=1$ より　$n=1$ でも成立

答　$a_n=\dfrac{1}{6}n(n^2-3n+8)$

例 4　$a_1=3$，$a_2=1$，

$3(n+1)a_{n+2}-(4n+1)a_{n+1}+na_n=0$

解　$3(n+1)x^2-(4n+1)x+n=0$ を解くと

$(3x-1)\{(n+1)x-n\}=0$　より

$x=\dfrac{1}{3}$ or $x=\dfrac{n}{n+1}$

漸化式を変形すると

$$3a_{n+2}-a_{n+1}=\frac{n}{n+1}(3a_{n+1}-a_n)$$

$b_n=3a_{n+1}-a_n$ とおくと

$$b_{n+1}=\frac{n}{n+1}b_n$$

$$b_n=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}b_1$$

ここで　$b_1=3a_2-a_1=0$

ゆえに　$b_n=0$

よって　$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$

数列$\{a_n\}$は 初項 3 公比$\dfrac{1}{3}$ の等比数列より

$$a_n=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

答　$a_n=\dfrac{1}{3^{n-2}}$

※　漸化式の変形における別解

$3(n+1)a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}-(3na_{n+1}+na_n)=0$

$(n+1)(3a_{n+2}-a_{n+1})-n(3a_{n+1}-a_n)=0$

よって　$3a_{n+2}-a_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}(3a_{n+1}-a_n)$

$$\boxed{14.\ \begin{cases}a_{n+1}=pa_n+qb_n & \cdots①\\ b_{n+1}=ra_n+sb_n & \cdots②\end{cases}}$$

例　$a_1=1$，$b_1=1$，$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n+b_n & \cdots①\\ b_{n+1}=3a_n+4b_n & \cdots②\end{cases}$

解　①より　$b_n=a_{n+1}-2a_n$

よって　$b_{n+1}=a_{n+2}-2a_{n+1}$

これらを②に代入して

$a_{n+2}-2a_{n+1}=3a_n+4(3a_n+4b_n)$

整理すると　$a_{n+2}=6a_{n+1}-5a_n$

変形して　$a_{n+2}-a_{n+1}=5(a_{n+1}-a_n)$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと　$b_{n+1}=5b_n$

また①より　$a_2=2+1=3$　であるから

$b_1=a_2-a_1=2$

∴　$b_n=2\cdot 5^{n-1}$

よって　$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot 5^{k-1}$$
$$=1+\frac{2(5^{n-1}-1)}{5-1}=\frac{1}{2}(5^{n-1}+1)$$

$a_1=\dfrac{1}{2}(5^0+1)=1$ であるから

$n=1$ のときも成り立つ

また　$b_n=\dfrac{1}{2}(5^n+1)-2\cdot\dfrac{1}{2}(5^{n-1}+1)$

$$=\frac{1}{2}\{(5\cdot 5^{n-1}+1)-(2\cdot 5^{n-1}+2)\}$$

答　$a_n=\dfrac{1}{2}(5^{n-1}+1)$　$b_n=\dfrac{1}{2}(3\cdot 5^{n-1}-1)$

別解　①+②より　$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n)$

数列$\{a_n+b_n\}$は 初項$a_1+b_1=2$ 公比 5 の等比数列であるから

$a_n+b_n=2\cdot 5^{n-1}$　$\cdots$③

①×3−②より　$3a_{n+1}-b_{n+1}=3a_n-b_n$

$3a_n-b_n=3a_{n-1}-b_{n-1}=\cdots=3a_1-b_1=2$

∴　$3a_n-b_n=2$　$\cdots$④

③＋④より　$a_n=\dfrac{1}{2}(5^{n-1}+1)$

③×3−④より　$b_n=\dfrac{1}{2}(3\cdot 5^{n-1}-1)$

※　①＋②×p が　$a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$ で表されたとする　実際に①＋②×p より

$a_{n+1}+pb_{n+1}=(2+3p)a_n+(1+4p)b_n$

2 つの式の右辺を比較して

$\begin{cases}q=2+3p\\ qp=1+4p\end{cases}$ ⇒　$(2+3p)p=1+4p$

⇒　$3p^2-2p-1=0$　⇒　$p=1,-\dfrac{1}{3}$

⇒　$(p=1,q=5)$ or $(p=-\dfrac{1}{3},q=1)$

このことを用いても漸化式の変形可能である