数学実践教育研究会レポート
北海道岩内高等学校
津　嶋　雅　顕

２項定理の導入について

１　はじめに

以前は数学Ａの内容として扱っていた２項定理ですが、現在は数学Ⅱで扱う内容となっています。本校に赴任して（というよりは教員になってから初めて）数学Ⅱを担当していますが、２項定理の授業はなかなか難しく、まだまだ研究の余地がある分野だと思っています。（私自身も高校生のときは２項定理に関してはあまり理解できませんでした）
ここでは、数学Ⅱの授業で、２項定理を導入する方法についていくつかまとめてみました。

２　２項定理の導入

教科書の記述では、

例えば、$(a+b)^5$ は５個の $(a+b)$ の積 $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ である。
そして、この展開式は、上の５個の因数のそれぞれから、aかbのどちらかをとって、掛け合わせた積の和である。例えば、５個の因数のうち、３個からa、残りの２個からbを取って掛け合わせると、その積はa^3b^2になる。
積が a^3b^2 になるa、bの取り方の総数は、５個の因数からbを取る２個を選ぶ組み合わせの総数に等しく、それは${}_5\mathrm{C}_2$で表される。

従って、$(a+b)^5$ の展開式における a^3b^2 の係数は ${}_5\mathrm{C}_2$＝１０である。

同様に考えて、$(a+b)^n$ の展開式における $a^{n-r}b^r$ の項の係数は、n 個の $(a+b)$ からbを取るr個を選ぶ組合せの総数${}_n\mathrm{C}_r$である。よって、二項定理が成り立つ・・・　となっています。

YouTube で検索していたら、２項定理の解き方についての動画を見つけました。教科書の内容を紹介した後にこの解き方は有効なのではないかと思いました。

（１）$(2a+3b)^5$ の展開式における、a^2b^3 の係数を求めよ。

$$\left\{\begin{array}{l} (2a)(2a)(3b)(3b)(3b) \qquad \rightarrow \qquad 2^2\cdot 3^3\cdot\ a^2\cdot\ b^3 \\ \qquad\qquad\cdot \\ \qquad\qquad\cdot \end{array}\right.$$

$2^2\cdot\ 3^3$ は係数
$\dfrac{5!}{2!3!}$ は同じものを含む順列の総数

よって、同じものを含む順列と考え、a^2b^3 の係数は $\dfrac{5!}{2!3!}\cdot 2^2\cdot 3^3=1080$

（２）$(x+\dfrac{2}{x})^4$ の展開式における、x^2 の係数を求めよ。

$$\left\{\begin{array}{l} x\cdot x\cdot x\cdot\dfrac{2}{x} \qquad \rightarrow \qquad x^3\cdot\dfrac{2}{x}=2x^2 \\ \qquad\cdot \\ \qquad\cdot \end{array}\right.$$

２は係数
$\dfrac{4!}{3!}$ は同じものを含む順列の総数

よって、同じものを含む順列と考え、x^2 の係数は $\dfrac{4!}{3!}\cdot 2=8$

（３） $(1+x+x^2)^7$ の展開式における、x^3 の係数を求めよ。

$$\left\{\begin{array}{l} 1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot x\cdot x\cdot x \quad \rightarrow \quad x^3 \\ \quad\quad\quad\vdots \end{array}\right.$$

$x^3 = x\cdot x\cdot x\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$
x が３つ、１が４つの同じものを含む順列

よって、同じものを含む順列と考え、x^3 の係数は $\dfrac{7!}{4!3!} = 35$

$$\left\{\begin{array}{l} 1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot x\cdot x^2 \quad \rightarrow \quad x^3 \\ \quad\quad\quad\vdots \end{array}\right.$$

$x^3 = x^2\cdot x\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1$
x^2 が１つ、x が１つ、１が５つの同じものを含む順列

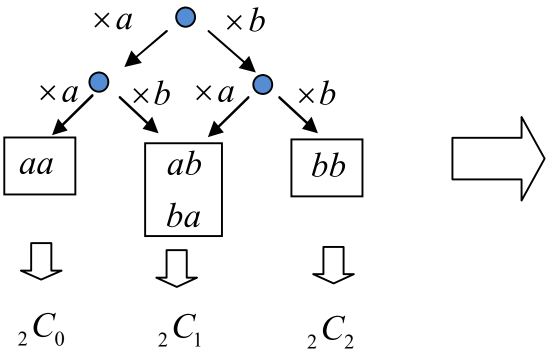
よって同じものを含む順列と考え、x^3 の係数は $\dfrac{7!}{5!1!1!} = 42$

よって、$(1+x+x^2)^7$ の展開式における、x^3 の係数は $35+42=77$

また、分かりやすさを重視する方法としては、次のような方法もあるということを最近教わりました。

（例）　$(a+b)^2$ の展開

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb$$



$$(a+b)^2 = {}_2C_0a^2b^0 + {}_2C_1a^1b^1 + {}_2C_2a^0b^2$$

３乗の展開式も同様にして導くことができます

また、通常、２項定理の式は

$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y^1 + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \cdots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \cdots + {}_nC_{n-1}x^1y^{n-1} + {}_nC_ny^n$

ですが、順番を入れ替えて、

$(x+y)^n = {}_nC_ny^n + {}_nC_{n-1}y^{n-1}x^1 + \cdots + {}_nC_ry^rx^{n-r} + \cdots + {}_nC_2y^2x^{n-2} + {}_nC_1y^1x^{n-1} + {}_nC_0x^n$

という式の方が生徒には理解しやすいことも教わりました。

Ｃ の右の数字と y の指数が一致している