数学実践教育研究会レポート
北海道函館工業高等学校　定時制課程
津　嶋　雅　顕

ピックの定理で面積を求める

1　ピックの定理について

格子多角形に関して、S を格子点を頂点にもつ多角形の面積、E を辺上（頂点を含む）の格子点の個数、I を多角形の内部の格子点の個数とすると、面積 S は次のような式で表される。

ピックの定理　$S=\dfrac{E}{2}+I-1$

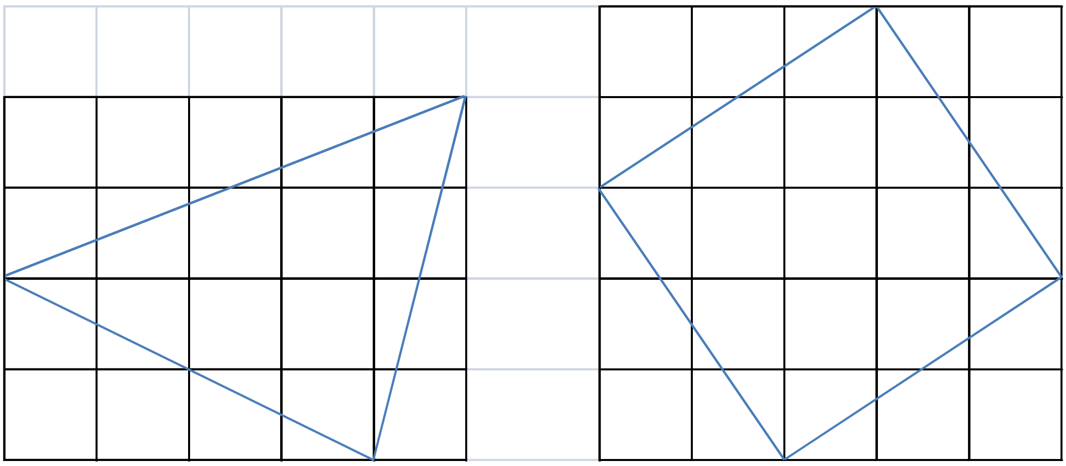
※ただし、内部に穴はあいていないものとする。内部に p 個の穴があいている場合、

$S=\dfrac{E}{2}+I-(p-1)$ という式になってしまう。

1899 年にオーストリアの数学者ゲオルグ・ピック（1899-1942）によって初めて示された、格子点を頂点の数だけで多角形の面積を求められる公式である。シンプルで美しい公式であるが、なぜか日本の教育で教えられることはない。

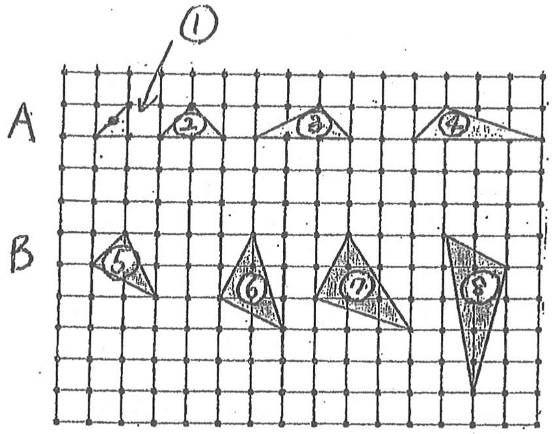
2　ピックの定理を使って、面積を求める授業をしてみました

授業ではいきなりピックの定理を教えず、「次の図形の面積を求めなさい。」と言って、グループワークで生徒に考えさせました。



一般的には全体の長方形の面積から三角形の面積を引き算して、三角形と四角形の面積を求めますが、生徒の中にはパズル的に図形を組み合わせて格子状の正方形を作り、三角形と四角形の面積を求めた生徒もいました（数値も正確でした）。一般的な求め方も紹介した上で、本題に入りました。

「実は、もっと簡単に面積を求める方法があります。」
「下の、格子点を頂点とする図形の面積を求めてみましょう。まずは、以下の表を完成させて下さい。」



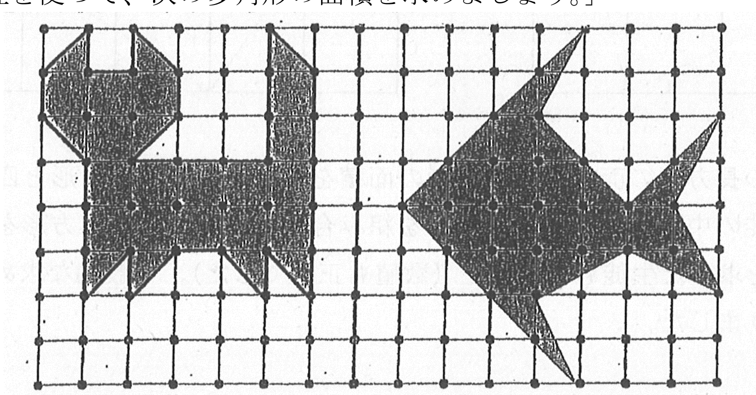
A

多角形	①	②	③	④
辺上（頂点を含む）の点の数（E）	3	4	5	6
内部の点の数（I）	0	0	0	0
面積（S）	0.5	1	1.5	2

B

多角形	⑤	⑥	⑦	⑧
辺上（頂点を含む）の点の数（E）	3	3	3	3
内部の点の数（I）	1	2	3	4
面積（S）	1.5	2.5	3.5	4.5

生徒は表の中を埋めるところまではできていましたが、なかなか規則性に気づくことができませんでした。そこで、ヒントとして辺上の点の数（E）を２で割った値を考えさせると、規則性に気づくことができました。(表を縦に見ることで規則性に気づくのですが･･･)
「Aの表から、辺上（頂点）の点の数の半分から１を引くと面積になります。
Bの表から、辺上（頂点）の点の数の半分の数に内部の点の数を足して１を引くと面積になります。」　→ピックの定理の式を紹介する
「ピックの定理を使って、次の多角形の面積を求めましょう。」



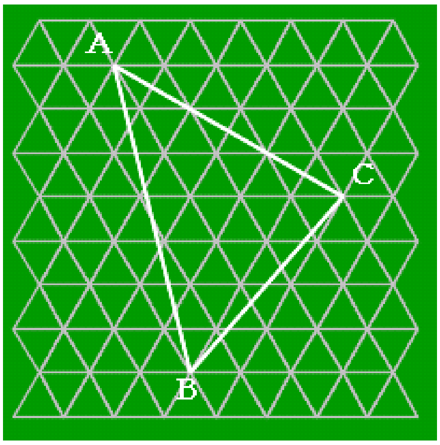
ピックの定理の式を使うと、どのグループもスムーズに面積を求めることができていました。

３　ピックの定理を使って問題を解く

最後に、インターネット上で見つけた、ピックの定理を使って解く問題を２つ紹介します。

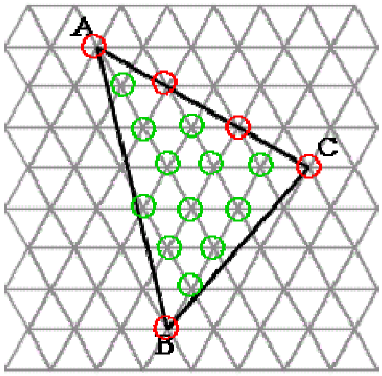
問題１）右の図のように、面積が１ｃｍ^{2}の正三角形をすきまなくしきつめた。３つの点Ａ、Ｂ、Ｃを結んできる三角形の面積は何ｃｍ^{2}ですか？

（2006　女子学院中）



（解答）１つのマス(正方形)の面積が１cm^{2}なら、ピックの定理をそのまま利用できるけれど、この問題は、１つの正三角形の面積が１cm^2。

しかし、△と▽を合わせてできる平行四辺形を考えると、平行四辺形１個の面積は２cm^{2}となり、ピックの定理で求めた答えのちょうど２倍が正解となる。ピックの定理を利用すると、5÷２＋１２－１＝１３.５(マス)の面積となり、平行四辺形１個は２（cm^2)なので、２×１３.５＝２７（cm^2)。



問題２）辺の長さが$\sqrt{5}$、$\sqrt{10}$、$\sqrt{13}$である三角形の面積を求めよ。

（解答）余弦定理で余弦の値を求めてから面積を求めるのが一般的だが、ここでは、

$5^2=1^2+2^2$、$13^2=2^2+3^2$、$10^2=3^2+1^2$のように分解し、幾何的に考えてみる。

図のように、頂点がすべて格子点上にある三角形を考える。

辺上の格子点の個数が３個、内部の格子点の個数が３個なので、ピックの定理より、三角形の面積は、$\dfrac{3}{2}+3-1=\dfrac{7}{2}$

となる。