数学実践教育研究会レポート
北海道函館工業高等学校　定時制課程
津　嶋　雅　顕

直積表で考える展開・因数分解・平方完成

1　はじめに

本校の生徒の中には小学校や中学校のときにに欠席が多く、中３で履修する展開や因数分解についてはほとんど理解できていない生徒が多く入学してきます。そのため、教科書通りにはなかなか進めないこともあり、理解を促すための工夫が必要だと強く感じています。

生徒の視覚的にうったえるような直積表が本質的な理解につながると感じ、授業を行いました。ちなみに、本校の教科書は「高校数学Ⅰ（実教出版・Ｂ５版）」を使用しています。

2　直積表を用いた式の展開（例）

展開の方法としては、項を一つずつ掛けていく方法や、乗法公式を用いたものがありますが、直積表を使った展開は分かりやすく、計算ミスが少なくなる効果的な方法だと思いました。

（1）　$(x+6)^2 = x^2 + 12x + 36$

	x	6
x		
6		

	x	6
x	x^2	$6x$
6	$6x$	36

・表の中の４つの式の和が展開した式になる。
・とくに、対称式の場合、対角線を対称として同じ式が表の中に入る。

（2）　$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

	a	b	c
a			
b			
c			

	a	b	c
a	a^2	ab	ca
b	ab	b^2	bc
c	ac	bc	b^2

（3）　$(x+y-2)(x+y+2) = x^2 + 2xy + y^2 - 4$

	x	y	-2
x			
y			
2			

	x	y	-2
x	x^2	xy	$-2x$
y	xy	y^2	$-2y$
2	$2x$	$2y$	-4

$x+y$ を Ａ と置き換えて因数分解する方法はなかなか生徒に定着しませんでした。

3　直積表を用いた因数分解（例）

教科書には因数分解の公式がいくつか紹介されています。しかし、展開の逆が因数分解であることを生徒に説明しても、なかなかピンとこない生徒が多いのが現状です。そこで、視覚的にうったえる方法として、直積表を使って授業を行いました。

ちなみに、共通因数でくくる因数分解では、直積表を使わず、教科書通りに授業をしました。たとえば、x^2+3x のような式では直積表を使ってもよいのですが、$6a^2b-4ab^2$ のような式では直積表を使う方が生徒にとっては分かりにくいので、教科書通りに共通因数を求めていきました。

（1）　$x^2-8x+7=(x-1)(x-7)$

	x	
x	x^2	
		7

⇒

	x	-7
x	x^2	$-7x$
-1	$-x$	7

表の辺の式が、因数になっている

（2）$3x^2+7x+2=(x+2)(3x+1)$

たすき掛けよる因数分解も同様に、直積表で考えることができます。

	$3x$	
x	$3x^2$	
		2

⇒

	$3x$	1
x	$3x^2$	x
2	$6x$	2

（3）$(2x+y)^2+(2x+y)-6=(2x+y+3)(2x+y-2)$

教科書では $2x+y$ をＡと置き換えて因数分解しています。

	$2x+y$	
$2x+y$	$(2x+y)^2$	
		-6

⇒

	$2x+y$	3
$2x+y$	$(2x+y)^2$	$3(2x+y)$
-2	$-2(2x+y)$	-6

直積表で、$2x+y$ を文字で置き換えても OK です。

（4）1つの文字に注目する因数分解では、式の置き換えよりも直積表を使った方がずっと簡単に因数分解できます。　教科書では

例　$xy-x+y-1$を因数分解しなさい。

$$xy-x+y-1=(xy-x)+(y-1)$$
$$=(y-1)x+(y-1)$$

ここで，$y-1=A$ とおくと

$$Ax+A=A(x+1)\ =(x+1)(y-1)$$

これを直積表で考えると、

xy	$-x$
y	-1

	y	-1
x	xy	$-x$
1	y	-1

表の中の$-x$とyは逆にしても同じ

よって、$xy-x+y-1=(x+1)(y-1)$　になります。

教科書にはない（授業では扱わなかった）次のような問題についても、直積表を使って考えることができます。

（5）$x^2+2xy+y^2+3x+3y+2=(x+y+1)(x+y+2)$

通常はxについて整理して、たすき掛けによる因数分解を行いますが、直積表を使うと非常にシンプルに解くことができます。

x^2	xy	x
xy	y^2	y
$2x$	$2y$	2

	x	y	1
x	x^2	xy	x
y	xy	y^2	y
2	$2x$	$2y$	2

（6）$x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$

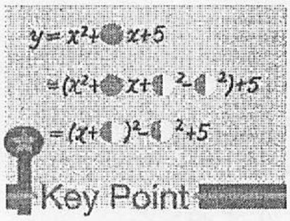
3次式＝2次式×1次式なので、２×１の直積表になる

	x^2		y^2
x	x^3		xy^2
y	x^2y		y^3

	x^2	$-xy$	y^2
x	x^3	$-x^2y$	xy^2
y	x^2y	$-xy^2$	y^3

4　直積表を用いた平方完成

（1）教科書の平方完成についての記述は



$y=x^2+6x+5$

$\quad=(x^2+2\times 3x+3^2-3^2)+5$

$\quad=(x+3)^2-9-5$

$\quad=(x+3)^2-4$

のようになっていますが、このことを説明してもなかなか生徒は理解できません。

そこで、直積表を使って次のように説明しました。

x^2	$3x$
$3x$	

	x	3
x	x^2	$3x$
3	$3x$	9

-4

・$6x$ を半分にして、$3x$ と $3x$ にします。
・９から４を引いて５にします。

よって、$y=x^2+6x+5=(x+3)^2-4$ となります。

授業では直積表を書いて平方完成をする方法を紹介しましたが、生徒はきちんと定着していたようでした。また、授業では扱いませんでしたが、次のような問題も同じように考えることができます。

（2）$y=x^2+3x-1=(x+\frac{3}{2})^2-\frac{13}{4}$

x^2	$\frac{3}{2}x$
$\frac{3}{2}x$	

	x	$\frac{3}{2}$
x	x^2	$\frac{3}{2}x$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}x$	$\frac{9}{4}$

$-\frac{13}{4}$

$\frac{9}{4}$ から $\frac{13}{4}$ を引いて -1 にします。

（3）$y=-x^2+6x-3=(x-3)(-x+3)+6=-(x-3)^2+6$

$-x^2$	$3x$
$3x$	

	x	-3
$-x$	$-x^2$	$3x$
3	$3x$	-9

$+6$

（4） $y=3x^2+8x+5=(3x+4)(x+\frac{4}{3})-\frac{1}{3}=3(x+\frac{4}{3})(x+\frac{4}{3})-\frac{1}{3}=3(x+\frac{4}{3})^2-\frac{1}{3}$

$3x^2$	$4x$
$4x$	

⇨

	$3x$	4	
x	$3x^2$	$4x$	
$\frac{4}{3}$	$4x$	$\frac{16}{3}$	$-\frac{1}{3}$

（5） $y=ax^2+bx+c=(ax+\frac{b}{2})(x+\frac{b}{2a})-\frac{b^2}{4a}+c=a(x+\frac{b}{2a})(x+\frac{b}{2a})-\frac{b^2}{4a}+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$

ax^2	$\frac{b}{2}x$
$\frac{b}{2}x$	

⇨

	ax	$\frac{b}{2}$	
x	ax^2	$\frac{b}{2}x$	
$\frac{b}{2a}$	$\frac{b}{2}x$	$\frac{b^2}{4a}$	$-\frac{b^2}{4a}+c$

5　実際に授業をしてみて

中学校時代に展開や因数分解を全く理解できていなかった生徒が、直積表で因数分解をすらすらと解いていく姿が見られました。特に、直積表を用いた平方完成は生徒にはかなり定着していました。しかし、その一方で、ノートに直積表を書くのに時間がかかる、あるいは面倒くさがり、結局、教科書通りに解く生徒もいました。もちろん、教科書どおりに問題を解くのも全然構いませんが、できるだけ公式や解き方を暗記したりせず、きちんと自分の頭で考え、理解してほしいと思っています。普段の授業ではそのようなことを意識しています。